

fiziqaz
academy

ЕСЕПТЕР БАНКІ · ТОЛЫҚ ШЕШУІМЕН

Физика есептері

Кинематика · Гидростатика · Статика · 40 есеп

Дереккөз: Гончаренко

Кинематика **29**

Гидростатика **4**

Статика **7**

fiziqaz academy · Ғалымбек Ташев · fiziqaz.academy

Мазмұны

I бөлім — есептердің шарттары, II бөлім — сол нөмірлердің толық шешуі.

1	Қарама-қарсы және бір бағытта жүрген екі автобус	Орташа	19	Жаттықтырушыны кездестірген соң кері бұрылған спортшылар колоннасы	Күрделі
2	Желмен және желге қарсы жүрген екі велосипедші	Орташа	20	Каналмен бе, әлде өзенмен бе: қайсысы тезірек?	Орташа
3	Екі қайықтың арасында ұшқан альбатрос	Оңай	21	Автомобиль мен өгіз арба: турист уақыт үнемдеді ме?	Оңай
4	Бір-біріне жақындаған ғарыш станциялары мен пошта контейнерлері	Орташа	22	Уақытты тең бөлген және жолды тең бөлген екі жаяу жүргінші	Орташа
5	Барып-қайтқан автомобильдің орташа жылдамдығы	Орташа	23	Алматы — Талғар — Алматы: желді ме, тымық па?	Орташа
6	Жолдың үш бөлігін әртүрлі жылдамдықпен жүрген пойыз	Орташа	24	Екі сұңгуір қайық және гидролокатор сигналы	Оңай
7	Негізгі топтан үш айналымға озған велошабандоз	Орташа	25	Эскалатормен жүгіріп түскен екі бала: баспалдақтарды санау	Күрделі
8	Жолдары мен уақыттары қатынаспен берілген пойыз	Орташа	26	Төмен түсетін эскалатормен жоғары жүгіру	Орташа
9	Екі турист және бір велосипед	Күрделі	27	Неліктен қозғалтқыш сөндірулі қайықтың рулі жұмыс істемейді?	Оңай
10	Жылдамдығын екі есе арттырған мотоциклші	Оңай	28	Қарсы келе жатқан пойыз екі электр пойызын кездестіреді	Орташа
11	Жолдың жартысы шоссе, жартысы грунт жол	Оңай	29	Торпедалық катер: торпедалар кемеге тие ме?	Күрделі
12	Жаяу, автобуспен және электричкамен жүрген туристер	Орташа	30	Төрт түрлі ағаш кубиктен құралған куб	Оңай
13	Өзеннен су алып, алауды сөндіру: ең аз уақыт	Күрделі	31	Платформадан салбыраған арқалық: күштің шекаралары	Күрделі
14	Алға озып кетіп, серігіне қайта оралған велосипедші	Орташа	32	Екі роликпен «бекітілген» арқалыққа ілінетін ең ауыр жүк	Күрделі
15	Жаяу жүргінші мен оны қуып жеткен автомобиль	Оңай	33	Итергішті құбыр бойымен өткізу: үйкеліс шарты	Күрделі
16	Құтқару шеңберін қуып жеткен катер	Орташа	34	Үш топсалы өзек: CD-ны көлденең ұстайтын ең кіші күш	Күрделі
17	Жаяу жүргіншіні басып озған және қарсы кездескен трамвайлар	Орташа	35	Құдықтағы бағана: трамвай сымының керілуі	Орташа
18	Жаяу жүргінші, велосипедші және мотоциклші	Күрделі	36	Маляр өзі тұрған алаңқайды көтереді	Орташа
			37	Құмда жүргенде шинадағы қысымды неге азайтады?	Оңай

38 Үш аяқты үстел: центрден ығысқан жүк Күрделі

39 Мұз бен пенопласттан құралған куб: Мұз ерігенде не өзгереді? Күрделі

40 Иінді таразы: ауада да, вакуумда да тепе-теңдік Күрделі

Есептер

40 есеп · шешулері II бөлімде, нөмірлері бойынша

Кинематика 29

1 Қарама-қарсы және бір бағытта жүрген екі автобус

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Орташа

Гончаренко № 1

Арасындағы қашықтық $d = 10$ км болатын А және В қалаларынан бір-біріне қарай екі автобус v_1 және v_2 жылдамдықтарымен шықты. Автобустар бір-біріне қарай жүргенде, олардың арасындағы қашықтық әрбір секунд сайын 5 м-ге азаяды. Ал автобустар бір бағытта қозғалса, олардың арасындағы қашықтық әрбір секунд сайын 1 м-ге азаяды. Автобустардың жылдамдықтарын анықтаңдар. Автобустар бір-біріне қарай жүргенде, қанша уақыттан кейін (t_1) және А қаласынан қандай қашықтықта (d_1) кездеседі? Бір бағытта қозғалса, екінші автобус бірінші автобусты қанша уақыттан кейін (t_2) және А қаласынан қандай қашықтықта (d_2) қуып жетеді?

2 Желмен және желге қарсы жүрген екі велосипедші

Кинематика

Ағыстағы қозғалыс

Орташа

Гончаренко № 2

Арасындағы қашықтық $d = 9$ км болатын А және В қалаларынан бір мезгілде бір-біріне қарай екі велосипедші шықты. А-дан В-ға қарай бағытта v_0 жылдамдықпен жел соғады. Бірінші велосипедші қалалар арасындағы қашықтықты $t_1 = 30$ мин-та, ал екіншісі $t_2 = 40$ мин-та жүріп өтті. Желдің v_0 жылдамдығын және велосипедшілердің тыныш ауа-райындағы v жылдамдығын анықтаңдар.

3 Екі қайықтың арасында ұшқан альбатрос

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Оңай

Гончаренко № 3

Бір-біріне қарай v_1 және v_2 жылдамдықтарымен қозғалатын екі қайық арасында альбатрос тұрақты v жылдамдықпен ұшады. Қайықтар арасындағы бастапқы қашықтық s болса, қайықтар кездескенге дейін альбатрос қандай қашықтықты ұшып өтеді?

4 Бір-біріне жақындаған ғарыш станциялары мен пошта контейнерлері

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Орташа

Гончаренко № 4

Екі ғарыш станциясы $v = 8 \cdot 10^3$ км/сағ жылдамдықпен бір-біріне жақындап келеді. Бір станциядан екіншісіне әрбір $\Delta t = 20$ мин сайын, бірінші станцияға қатысты $v_1 = 8 \cdot 10^3$ км/сағ

жылдамдықпен пошта контейнерлері жіберіледі. Екінші станцияның командирі бір сағат ішінде қанша хабарлама алатынын анықтаңдар.

5 Барып-қайтқан автомобильдің орташа жылдамдығы

Кинематика

Орташа жылдамдық

Орташа

Гончаренко № 5

Автомобиль қалалар арасындағы қашықтықты t_1 уақытында v_1 жылдамдықпен жүріп өтті. Кері қайтқанда ол жолдың бір бөлігін сол t_1 уақытында v_2 жылдамдықпен, ал қалған уақытты v_3 жылдамдықпен жүрді. Автомобильдің қозғалысының орташа жылдамдығын анықтаңдар.

6 Жолдың үш бөлігін әртүрлі жылдамдықпен жүрген пойыз

Кинематика

Орташа жылдамдық

Орташа

Гончаренко № 6

Егер пойыз жолдың бірінші үштен бір бөлігін $v_1 = 50$ км/сағ жылдамдықпен, екінші үштен бір бөлігін $v_2 = 75$ км/сағ жылдамдықпен, ал соңғы үштен бір бөлігін алдыңғы екі бөліктегі орташа жылдамдықтан екі есе үлкен жылдамдықпен жүрсе, пойыздың барлық жолдағы орташа жылдамдығын анықтаңдар.

7 Негізгі топтан үш айналымға озған велошабандоз

Кинематика

Орташа жылдамдық

Орташа

Гончаренко № 7

Жүзінші айналымды аяқтай отырып, веложарыстың көшбасшысы негізгі топтан 3 айналымға озып шықты. Егер топтың орташа жылдамдығы 45 км/сағ болса, көшбасшының орташа жылдамдығын анықтаңдар.

8 Жолдары мен уақыттары қатынаспен берілген пойыз

Кинематика

Орташа жылдамдық

Орташа

Гончаренко № 8

Пойыз жүрген жолының жеке бөліктері 1:3:4:2 қатынасында болса, ал оларды жүріп өту үшін уақыт 2:4:3:1 қатынасында жұмсалса және соңғы бөліктегі жылдамдық 80 км/сағ-қа тең болса, пойыздың орташа жылдамдығын анықтаңдар.

9 Екі турист және бір велосипед

Кинематика

Орташа жылдамдық

Күрделі

Гончаренко № 9

Екі турист бір мезгілде — біреуі v_1 жылдамдықпен велосипедпен, ал екіншісі v_2 жылдамдықпен жаяу — саяхатқа шықты. Жолдағы белгілі бір жерде велосипедші велосипедті жаяу жүруші үшін қалдырып, өзі әрі қарай жаяу жүреді. Екі турист де саяхаттың соңғы пунктіне бір мезгілде жетеді. Туристер қандай орташа жылдамдықпен қозғалды? Егер велосипедші жолдың бір жерінде велосипедті үшінші туристке беріп, ол

жаяу жүрушіге қарсы жүріп велосипедті оған табыстаса және екі турист те саяхатты қайтадан бір мезгілде аяқтаса, орташа жылдамдық өзгере ме?

10 Жылдамдығын екі есе арттырған мотоциклші

Кинематика

Орташа жылдамдық

Оңай

Гончаренко № 10

Мотоциклші екі пункттің арасындағы қашықтықты 40 км/сағ жылдамдықпен жүріп өтті. Содан кейін жылдамдығын 80 км/сағ-қа дейін арттырып, тағы екі есе аз қашықтықты жүрді. Мотоциклшінің қозғалыстың бүкіл уақытындағы орташа жылдамдығын анықтаңдар.

11 Жолдың жартысы шоссе, жартысы грунт жол

Кинематика

Орташа жылдамдық

Оңай

Гончаренко № 11

Автомобиль жолдың бірінші жартысын шоссемен $v_1 = 90$ км/сағ жылдамдықпен, екінші жартысын грунт жолмен $v_2 = 30$ км/сағ жылдамдықпен жүріп өтті. Автомобильдің орташа жылдамдығын анықтаңдар.

12 Жаяу, автобуспен және электричкамен жүрген туристер

Кинематика

Орташа жылдамдық

Орташа

Гончаренко № 12

Демалыс орнынан қалаға дейінгі жолды туристер орташа 32 км/сағ жылдамдықпен өтті: жартылай жаяу, жартылай автобуспен және содан кейін электричкамен. Жол бөліктерінің ұзындықтары 1:4:45 қатынасында, ал оларға сәйкес уақыт аралықтары 4:1:20 қатынасында болса, әр бөлікті қандай жылдамдықпен өткен?

13 Өзеннен су алып, алауды сөндіру: ең аз уақыт

Кинематика

Экстремум есептері

Күрделі

Гончаренко № 13

Адам өзеннен 6 м қашықтықта тұр. Өзеннен 34 м қашықтықта алау жанып тұр. Адамнан және алаудан өзен жағасына түсірілген перпендикулярлардың арасындағы қашықтық 30 м. Адам өзенге $v = 5$ м/с жылдамдықпен жүгіріп барып, шелекке су толтырады, содан кейін алауға жүгіріп барып, оны сөндіреді. Шелекке су толтыруға $\tau = 5$ с уақыт кетсе, адамға алауды өшіру үшін ең аз дегенде қанша уақыт қажет?

14 Алға озып кетіп, серігіне қайта оралған велосипедші

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Орташа

Гончаренко № 14

Екі велосипедші $v_1 = 35$ км/сағ жылдамдықпен жүріп келеді. Олардың біреуі жылдамдығын $v_2 = 45$ км/сағ-ға дейін арттырып, осы жылдамдықпен $l = 10$ км жол жүреді, содан кейін жылдамдығын кемітпей, бірінші велосипедшіге қарай бұрылады. Велосипедші алға жүріп кеткен сәттен серігіне қайта оралғанша дейін қанша уақыт өтеді?

15

Жаяу жүргінші мен оны қуып жеткен автомобиль

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Оңай

Гончаренко № 15

Бір қаладан екінші қалаға жаяу жүргінші шықты. Ол $s_1 = 27$ км қашықтықты жүріп өткен кезде, оның артынан жылдамдығы 10 есе артық автомобиль шықты. Олар екінші қалаға бір мезгілде келді. Қалалар арасындағы қашықтық қандай?

16

Құтқару шеңберін қуып жеткен катер

Кинематика

Ағыстағы қозғалыс

Орташа

Гончаренко № 16

Өзен ағысымен төмен қарай жүзіп келе жатқан катер құтқару шеңберін қуып жетеді. Осыдан 30 мин өткен соң катер қозғалтқышының қуатын өзгертпестен кері бұрылады да, шеңберді алғашқы кездескен жерінен 5 км қашықтықта қайта кездестіреді. Өзен ағысының жылдамдығын анықтаңдар.

17

Жаяу жүргіншіні басып озған және қарсы кездескен трамвайлар

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Орташа

Гончаренко № 17

Трамвай жолын бойлай жаяу келе жатқан адамды әр 7 мин сайын трамвай басып озады, ал әр 5 мин сайын оған қарсы келе жатқан трамвай кездеседі. Трамвайлар бір-бірінен қандай уақыт аралығымен жүреді?

18

Жаяу жүргінші, велосипедші және мотоциклші

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Күрделі

Гончаренко № 18

Жаяу жүргінші, велосипедші және мотоциклші шоссемен бір бағытта тұрақты жылдамдықтармен қозғалып келеді. Велосипедші мен мотоциклші бір нүктеде болған сәтте жаяу жүргінші олардан 10 км алда еді. Мотоциклші жаяу жүргіншіні қуып жеткен кезде велосипедші олардан 5 км артта келе жатты. Велосипедші жаяу жүргіншіні қуып жеткен сәтте мотоциклші жаяу жүргіншіден неше километр алда болады?

19

Жаттықтырушыны кездестірген соң кері бұрылған спортшылар колоннасы

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Күрделі

Гончаренко № 19

Спортшылар ұзындығы l_0 колонна құрап, v жылдамдықпен жүгіріп келеді. Оларға қарсы u жылдамдықпен ($u < v$) жаттықтырушы жүгіріп келеді. Жаттықтырушымен қатарласқан әрбір спортшы кері бұрылып, сол v жылдамдықпен жүгіреді. Барлық спортшылар кері бұрылғаннан кейін колоннаның ұзындығы қандай болады?

20 Каналмен бе, әлде өзенмен бе: қайсысы тезірек?

Кинематика

Ағыстағы қозғалыс

Орташа

Гончаренко № 20

А және В елді мекендері бір жағынан су каналымен, екінші жағынан өзенмен байланысқан, әрі екі жолдың да ұзындығы 12 км. Жылдамдығы 16 км/сағ моторлы қайық А пунктінен В пунктіне барып, мүмкіндігінше аз уақытта кері оралуы керек (қайық барып-қайту жолын тек өзенмен немесе тек каналмен жүреді). Қайық қай жолмен тезірек барып қайтады?

21 Автомобиль мен өгіз арба: турист уақыт үнемдегі ме?

Кинематика

Орташа жылдамдық

Оңай

Гончаренко № 21

Турист жолдың бірінші жартысын автомобильмен жаяу жүргендегіден 10 есе жылдам, ал екінші жартысын өгіз арбамен жаяу жүргендегіден екі есе баяу жүріп өтті. Турист бүкіл жолды жаяу жүрмей, осылайша жүріп өткенде уақыт үнемдеді ме?

22 Уақытты тең бөлген және жолды тең бөлген екі жаяу жүргінші

Кинематика

Орташа жылдамдық

Орташа

Гончаренко № 22

Екі жаяу жүргінші А пунктінен В пунктіне бір мезгілде шықты. Біріншісі А-дан В-ға дейінгі жолға жұмсаған уақытының бірінші жартысында v_1 жылдамдықпен, ал қалған жартысында v_2 жылдамдықпен жүрді. Екіншісі жолдың бірінші жартысын v_2 жылдамдықпен, ал екінші жартысын v_1 жылдамдықпен жүріп өтті. Олардың қайсысы В пунктіне бұрын жетті?

23 Алматы — Талғар — Алматы: желді ме, тымық па?

Кинематика

Ағыстағы қозғалыс

Орташа

Гончаренко № 23

Велосипедші Алматы — Талғар — Алматы бағытымен жүреді. Велосипедші қандай ауа райында (желді ме, әлде тымық па) аз уақыт жұмсайды?

24 Екі сүңгуір қайық және гидролокатор сигналы

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Оңай

Гончаренко № 24

Екі сүңгуір қайық бір-бірінің артынан l қашықтықта бірдей v жылдамдықпен жүзіп келеді. Артқы қайықтан жіберілген гидролокатор сигналы алдыңғы қайыққа жетіп, одан шағылып, кері қайтады. Сигнал жіберілгеннен кейін қанша уақыттан соң шағылған сигнал қабылданатынын анықтаңдар. Судағы дыбыстың жылдамдығы u .

25 Эскалатормен жүгіріп түскен екі бала: баспалдақтарды санау

Кинематика

Эскалатор

Күрделі

Гончаренко № 25

Метроның қозғалып тұрған эскалаторымен ережені бұзып екі бала төмен қарай жүгіріп түседі: біреуі u жылдамдықпен, екіншісі одан n есе үлкен жылдамдықпен. Біріншісі k_1 баспалдақ, екіншісі k_2 баспалдақ санады. Эскалатордың баспалдақтар саны N -ді және оның қозғалыс жылдамдығы v -ні анықтаңдар.

26 Төмен түсетін эскалатормен жоғары жүгіру

Кинематика

Эскалатор

Орташа

Гончаренко № 26

Метро эскалаторы төмен қарай жүгіріп бара жатқан адамды $t_1 = 1$ мин ішінде түсіреді. Егер адам төмен қозғалып тұрған эскалатормен жоғары қарай $t_2 = 4$ мин ішінде жүгіріп шығатын болса, эскалаторда қозғалмай тұрған адам қанша уақытта төмен түседі?

27 Неліктен қозғалтқыш сөндірулі қайықтың рулі жұмыс істемейді?

Кинематика

Ағыстағы қозғалыс

Оңай

Гончаренко № 27

Өзен ағысымен төмен қарай жүзіп келе жатқан моторлы қайықты оның артқы бөлігіне орнатылған рульмен басқару оңай. Неліктен қозғалтқыш сөндірулі болғанда қайықты бұлай басқару мүмкін емес?

28 Қарсы келе жатқан пойыз екі электр пойызын кездестіреді

Кинематика

Салыстырмалы қозғалыс

Орташа

Гончаренко № 28

Астанадан Ерейментауға қарай $t_1 = 10$ мин аралықпен $v = 30$ км/сағ жылдамдықпен екі электр пойызы жолға шықты. Қарсы келе жатқан пойыз бұл электр пойыздарын бірінен кейін бірін $t_2 = 4$ мин аралықпен кездестірсе, оның жылдамдығы қандай?

29 Торпедалық катер: торпедалар кемеге тие ме?

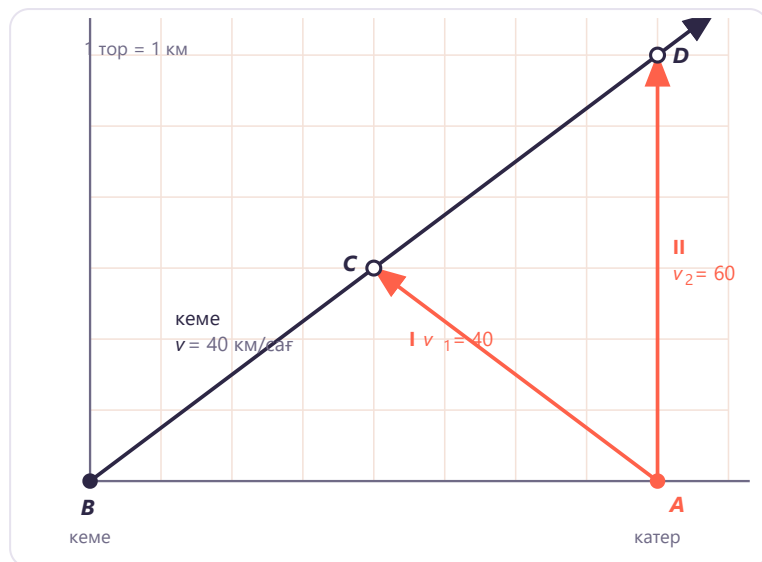
Кинематика

Графиктік әдіс

Күрделі

Гончаренко № 29

Торпедалық катер А нүктесінде тұрып (1-сурет), жіберу сәтінде В нүктесінен өтіп бара жатқан кемеге екі торпеда атады. Торпедалар мен кемеңің суға қатысты жылдамдықтары тұрақты: кеме В-дан D бағытына қарай $v = 40$ км/сағ жылдамдықпен жүзеді, I торпеда С нүктесіне қарай $v_1 = 40$ км/сағ, ал II торпеда D нүктесіне қарай $v_2 = 60$ км/сағ жылдамдықпен ұшады. Суреттегі бір тор — 1 км. Циркуль мен сызғышты пайдаланып, торпедалардың кемеге тиетін-тимейтінін анықтаңдар.



1-сурет. Катер А нүктесінде, кеме жіберу сәтінде В нүктесінде. Бір тор — 1 км.

Гидростатика 4

30 Төрт түрлі ағаш кубиктен құралған куб

Гидростатика

Тығыздық

Оңай

Гончаренко № 30

Куб бірдей көлемді, жақсы жанастырылған көптеген ағаш кубиктерден құралған. Кубиктер әртүрлі ағаштан жасалған: тығын ағашы ($\rho_1 = 200 \text{ кг/м}^3$), емен ($\rho_2 = 700 \text{ кг/м}^3$), кедр ($\rho_3 = 550 \text{ кг/м}^3$) және қара ағаш ($\rho_4 = 1200 \text{ кг/м}^3$). Осы материалдардан жасалған кубиктердің сандары 3 : 4 : 2 : 1 қатынасында болса, кубтың орташа тығыздығы қандай?

37 Құмда жүргенде шинадағы қысымды неге азайтады?

Гидростатика

Қысым

Оңай

Гончаренко № 37

Құм үстімен жүргенде автомобиль шиналарындағы ауа қысымын азайтуға кеңес береді. Не үшін?

39 Мұз бен пенопласттан құралған куб: мұз ерігенде не өзгереді?

Гидростатика

Архимед күші

Күрделі

Гончаренко № 39

Калориметрдегі суда екі жартыдан құралған куб жүзіп жүр. Төменгі жартысы — мұздан ($\rho_{\text{м}} = 0,9\rho_{\text{с}}$), жоғарғы жартысы — пенопласттан ($\rho_{\text{п}} = 0,5\rho_{\text{с}}$). Кубтың қыры $d = 8 \text{ см}$. Мұз ерігеннен кейін пенопласт жартысы қандай тереңдікке батады? Сол кезде кубтың үсті мен калориметрдің түбі арасындағы қашықтық қаншаға өзгереді?

40

Иінді таразы: ауада да, вакуумда да тепе-теңдік

Гидростатика

Архимед күші

Күрделі

Гончаренко № 40

Қорғасын кесекті иінді таразыда өлшеу үшін алюминий гірлер пайдаланылды. Ауада теңестірілген таразыны вакуум-камераға қойғанда тепе-теңдік бұзылды. Ал гірлер мен кесекті орындарымен ауыстырғанда, керісінше, тепе-теңдік дәл вакуум-камерада сақталып, ауада бұзылатын болды. Таразы иіндерінің ұзындықтары бір-бірінен неше процентке өзгеше? Ауаның тығыздығын судың тығыздығының $1/800$ бөлігіне тең деп алыңдар.

Статика 7

31

Платформадан салбыраған арқалық: күштің шекаралары

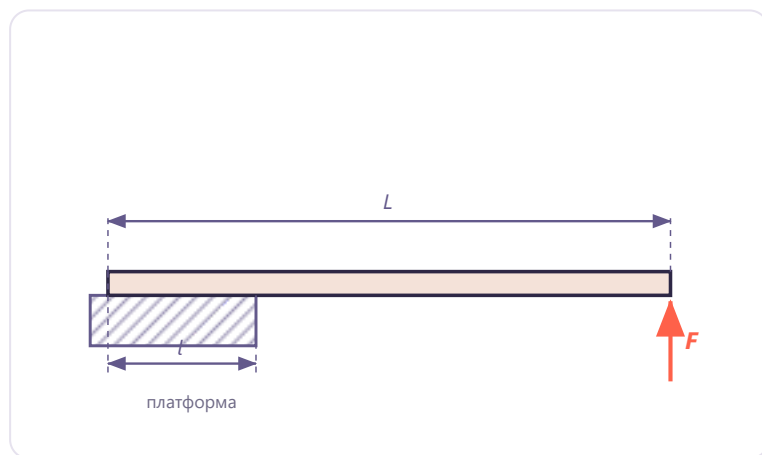
Статика

Күш моменті

Күрделі

Гончаренко № 31

Ұзындығы $L = 6$ м біртекті арқалықтың бір бөлігі ($l = 1$ м) көлденең платформада жатыр, қалған бөлігі платформадан салбырап тұр (2-сурет). Салбыраған бөліктің ұшына жоғары бағытталған F күші түсірілген. Арқалық көлденең қалпында тек күштің мәні $F_{\min}$ -нен $F_{\max}$ -қа дейінгі аралықта болғанда ғана қалады. Арқалықтың қалыңдығы оның ұзындығынан әлдеқайда аз болса, $F_{\max}/F_{\min}$ қатынасын табыңдар.



2-сурет. Арқалықтың l бөлігі платформада, ұшына F күші түсірілген.

32

Екі роликпен «бекітілген» арқалыққа ілінетін ең ауыр жүк

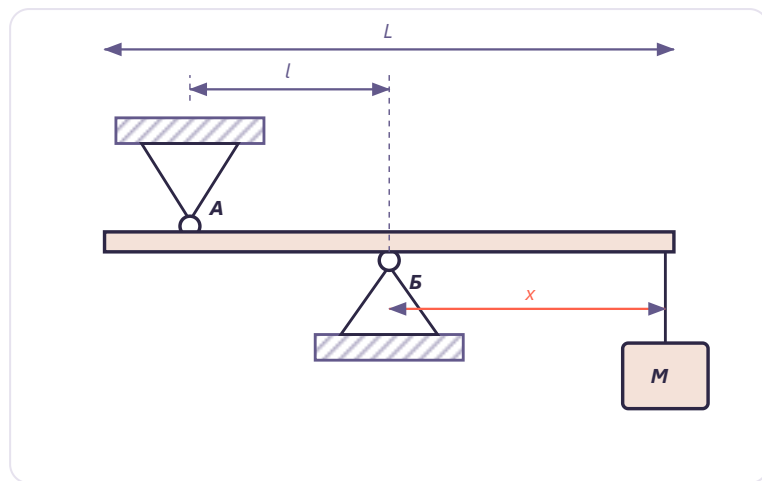
Статика

Күш моменті

Күрделі

Гончаренко № 32

А және Б ролик-тіректері арқалықты көлденең қалыпта «бекітуге» мүмкіндік береді (3-сурет): А ролигі арқалықты жоғарыдан басады, Б ролигі оны астынан тіреп тұрады. Б ролигіне арқалық F_0 -ден артық күшпен баспауы керек, әйтпесе ролик бұзылады. Арқалықтың ұшына ең үлкен қандай жүк іліп қоюға болады? Арқалықты қалай орналастыру керек? Арқалықтың массасы m , ұзындығы L , роликтердің көлденең арақашықтығы l .



3-сурет. А ролигі арқалықты жоғарыдан басады, Б ролигі астынан тіреді.

33 Итергішті құбыр бойымен өткізу: үйкеліс шарты

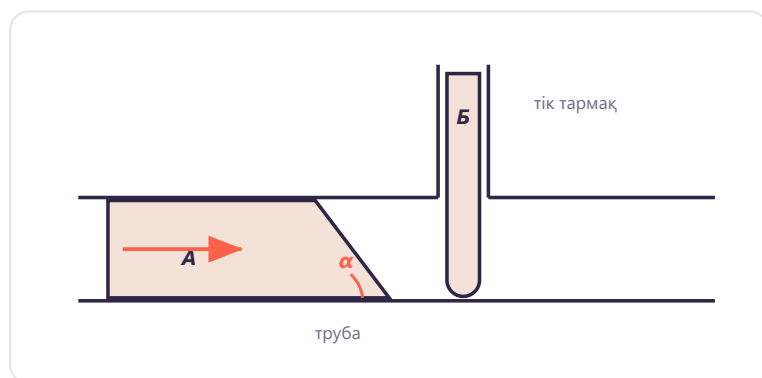
Статика

Үйкеліс

Күрделі

Гончаренко № 33

Көлденең құбырдың ішінде итергіш А сырғи алады (4-сурет). Құбырды төменгі ұшы дөңгелектелген Б өзегі бөгеп тұр. Өзек негізгі құбырдан тарайтын тегіс (үйкеліссіз) тік тармақтың бойымен еркін қозғала алады. Итергіштің алдыңғы көлбеу беті құбыр осімен α бұрыш жасайды. Итергішті құбыр бойымен өткізіп жіберу үшін оның беті мен өзектің арасындағы үйкеліс коэффициенті қандай болуы керек?



4-сурет. Итергіш А, бөгеуіш өзек Б; көлбеу беттің бұрышы α .

34 Үш топсалы өзек: CD-ны көлденең ұстайтын ең кіші күш

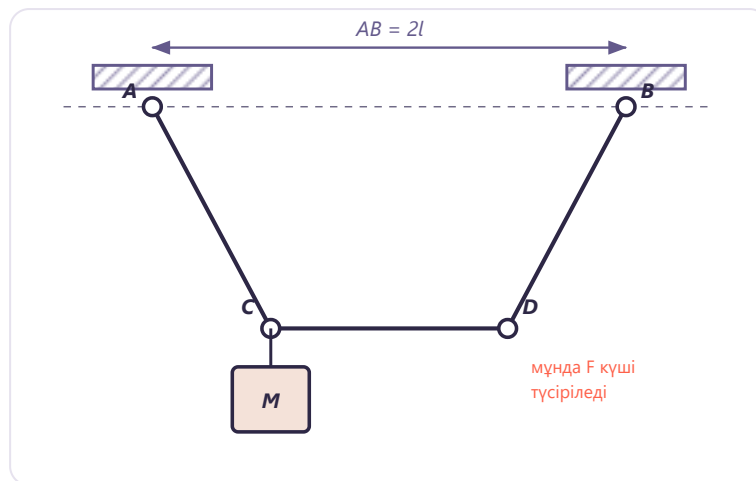
Статика

Күш моменті

Күрделі

Гончаренко № 34

Үш бірдей салмақсыз өзек топсалар арқылы жалғанып, бір көлденеңде жатқан А және В нүктелеріне бекітілген (5-сурет). АВ қашықтығы өзектің ұзындығынан екі есе артық. С топсасына массасы М жүк ілінген. CD өзегі көлденең болуы үшін D топсасына ең кіші қандай күш түсіру керек?



5-сурет. AC, CD, DB өзектері топсалармен жалғанған; C топсасында M жүгі.

35 Құдықтағы бағана: трамвай сымының керілуі

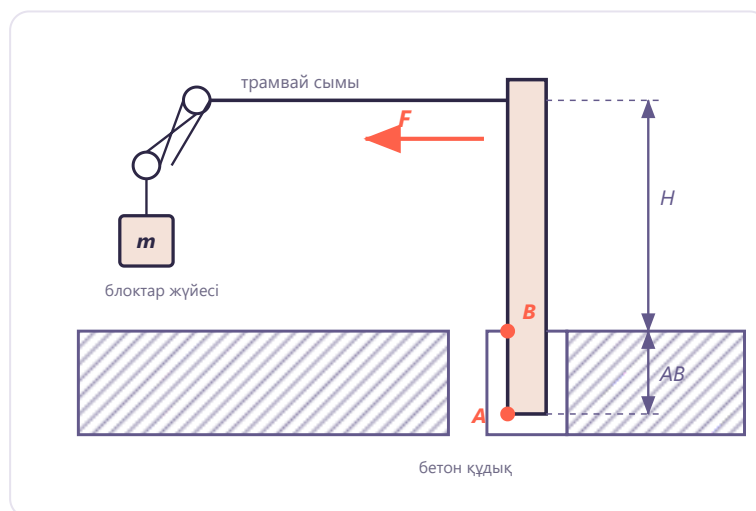
Статика

Күш моменті

Орташа

Гончаренко № 35

Трамвай желісінің сымын керу үшін оның ұшын бағанаға бекіткен (6-сурет). Бағананың басындағы блоктар жүйесі сымның керілу күшін ілінген жүктің салмағынан төрт есе арттырады; жүктің массасы $m = 100$ кг. Бағана бетон құдықта тұр және құдыңтың түбіндегі A нүктесінде, жер бетіндегі B нүктесінде ғана тіреледі. Бағанаға A және B нүктелерінде әсер ететін күштерді анықтаңдар. Сым бекітілген нүктенің B-дан биіктігі $H = 10$ м, құдыңтың тереңдігі $AB = 1,5$ м.



6-сурет. Бағана бетон құдықта A және B нүктелерінде ғана тіреледі.

36 Маляр өзі тұрған алаңқайды көтереді

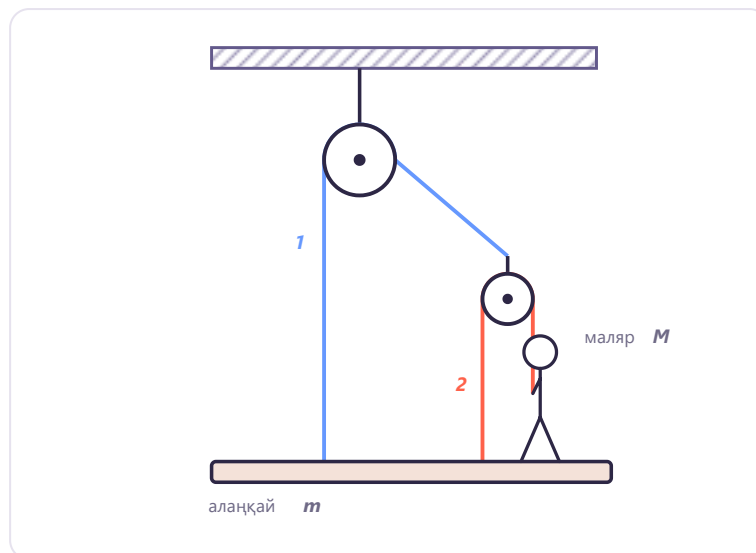
Статика

Блоктар

Орташа

Гончаренко № 36

Маляр өзі тұрған алаңқайды 7-суреттегі блоктар жүйесімен ұстап тұр. Малярдың массасы $M = 60$ кг, алаңқайдың массасы $m = 30$ кг. Маляр арқанды қандай күшпен тартуы керек? Ол алаңқайға қандай күшпен басады? Маляр ең үлкен қандай массалы алаңқайды ұстап тұра алады?



7-сурет. Маляр алаңқайда тұрып, арқанның ұшынан тартады.

38 Үш аяқты үстел: центрден ығысқан жүк

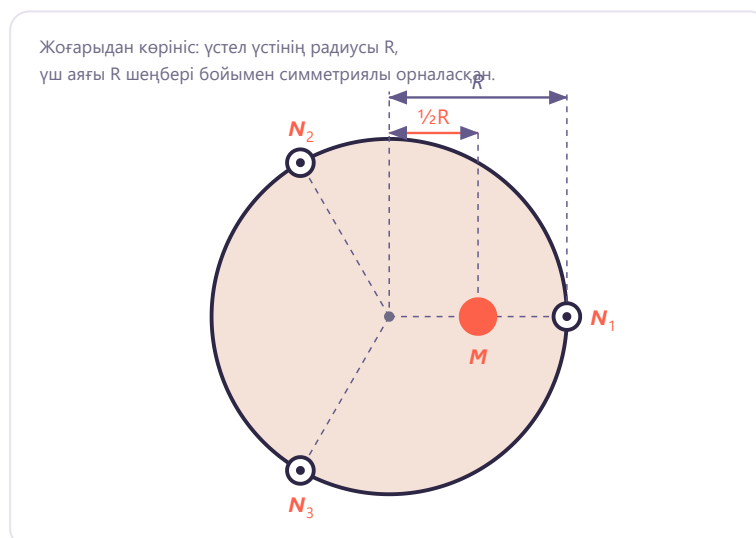
Статика

Күш моменті

Күрделі

Гончаренко № 38

Радиусы R жеңіл дөңгелек үстел үш аяғымен көлденең еденде тұр (8-сурет). Үстелдің үстіне массасы M ауыр жүк қойылды: ол үстелдің центрінен аяқтардың біреуіне қарай $\frac{1}{2}R$ қашықтыққа ығысқан. Үстел аяқтарының еденге түсіретін қысым күштерін анықтаңдар. Аяқтары тік және R радиусты шеңбер бойымен симметриялы орналасқан. Еден тегіс.



8-сурет. Жоғарыдан көрініс: жүк центрден 1-аяққа қарай $\frac{1}{2}R$ ығысқан.

Шешулері

Әр шешудің нөмірі I бөлімдегі есептің нөмірімен бірдей

Кинематика 29

1 Қарама-қарсы және бір бағытта жүрген екі автобус

Салыстырмалы қозғалыс · Орташа · Гончаренко № 1

Жауабы. $v_1 = 3$ м/с, $v_2 = 2$ м/с; $t_1 \approx 33$ мин, $d_1 = 6$ км; $t_2 \approx 2$ сағ 47 мин, $d_2 = 30$ км

Берілгені. $d = 10$ км = 10 000 м; жақындау жылдамдығы 5 м/с; бір бағытта — 1 м/с.

Табу керек. $v_1, v_2, t_1, d_1, t_2, d_2$.

Идея. «Арасындағы қашықтық әрбір секунд сайын қанша азаяды» деген сөз — бұл дәл **салыстырмалы жылдамдықтың** модулі. Бір автобусты санақ денесі етіп алсақ, екіншісі соған қарай осы жылдамдықпен жақындайды.

Шешуі.

1. Қарама-қарсы қозғалғанда салыстырмалы жылдамдық — жылдамдықтардың қосындысы, бір бағытта қозғалғанда — айырмасы:

$$v_1 + v_2 = 5 \text{ м/с}, \quad v_1 - v_2 = 1 \text{ м/с}.$$

2. Екі теңдеуді қоссақ: $2v_1 = 6$ м/с, яғни

$$v_1 = 3 \text{ м/с} = 10,8 \text{ км/сағ}, \quad v_2 = 2 \text{ м/с} = 7,2 \text{ км/сағ}.$$

3. **Кездесу (қарама-қарсы қозғалыс).** Автобустардың арасындағы d қашықтық 5 м/с жылдамдықпен жабылады:

$$t_1 = d / (v_1 + v_2) = 10\,000 / 5 = 2000 \text{ с} \approx 33,3 \text{ мин}.$$

А-дан кездесу нүктесіне дейінгі қашықтық — бірінші автобус жүріп өткен жол:

$$d_1 = v_1 t_1 = 3 \cdot 2000 = 6000 \text{ м} = 6 \text{ км}.$$

Тексеру: екінші автобус $2 \cdot 2000 = 4000$ м = 4 км жүрді, $6 + 4 = 10$ км ✓

4. **Қуып жету (бір бағытта).** Арақашықтық азаю үшін **артта келе жатқан автобус жылдам болуы** керек. Сондықтан екеуі де $A \rightarrow B$ бағытында жүрсін: А-дан шыққан жылдам автобус ($v_1 = 3$ м/с) алда келе жатқан баяу автобусты ($v_2 = 2$ м/с) қуып жетеді. Бастапқы алшақтық d , ол $(v_1 - v_2) = 1$ м/с жылдамдықпен жабылады:

$$t_2 = d / (v_1 - v_2) = 10\,000 / 1 = 10\,000 \text{ с} = 2 \text{ сағ } 46 \text{ мин } 40 \text{ с} \approx 2 \text{ сағ } 47 \text{ мин.}$$

$$d_2 = v_1 t_2 = 3 \cdot 10\,000 = 30\,000 \text{ м} = 30 \text{ км.}$$

Тексеру: баяу автобус А-дан 10 км қашықтықтан бастап $2 \cdot 10\,000 = 20\,000$ м жүрді, $10 + 20 = 30$ км ✓

Жауабы. $v_1 = 3 \text{ м/с}$, $v_2 = 2 \text{ м/с}$; $t_1 \approx 33,3 \text{ мин}$, $d_1 = 6 \text{ км}$; $t_2 \approx 2 \text{ сағ } 47 \text{ мин}$, $d_2 = 30 \text{ км}$.

2

Желмен және желге қарсы жүрген екі велосипедші

Ағыстағы қозғалыс · Орташа · Гончаренко № 2

Жауабы. $v_0 \approx 2,3 \text{ км/сағ}$; $v \approx 15,8 \text{ км/сағ}$

Берілгені. $d = 9 \text{ км}$; $t_1 = 30 \text{ мин} = 0,5 \text{ сағ}$; $t_2 = 40 \text{ мин} = 2/3 \text{ сағ}$.

Табу керек. v_0 , v .

Идея. Велосипедшінің жерге қатысты жылдамдығы — оның ауаға қатысты жылдамдығы мен желдің жылдамдығының қосындысы. Мұнда бәрі бір түзудің бойында, сондықтан векторлық қосу жай алгебралық қосуға айналады. Екеуінің де тыныш ауадағы жылдамдығы бірдей — v .

Шешуі.

1. Бірінші велосипедші $A \rightarrow B$ бағытында, яғни **желмен бірге** жүреді, оның жердегі жылдамдығы $v + v_0$. Екіншісі $B \rightarrow A$, яғни **желге қарсы** жүреді, оның жылдамдығы $v - v_0$.

$$v + v_0 = d / t_1 = 9 / 0,5 = 18 \text{ км/сағ},$$

$$v - v_0 = d / t_2 = 9 / (2/3) = 13,5 \text{ км/сағ}.$$

2. Қоссақ: $2v = 31,5 \text{ км/сағ}$; азайтсақ: $2v_0 = 4,5 \text{ км/сағ}$. Демек

$$v = 15,75 \approx 15,8 \text{ км/сағ}, \quad v_0 = 2,25 \approx 2,3 \text{ км/сағ}.$$

Жалпы түрі. $v = d(t_1 + t_2) / (2t_1 t_2)$, $v_0 = d(t_2 - t_1) / (2t_1 t_2)$.

Жауабы. $v \approx 15,8 \text{ км/сағ}$; $v_0 \approx 2,3 \text{ км/сағ}$.

3

Екі қайықтың арасында ұшқан альбатрос

Салыстырмалы қозғалыс · Оңай · Гончаренко № 3

Жауабы. $l = vs / (v_1 + v_2)$

Берілгені. v_1 , v_2 — қайықтардың жылдамдықтары; v — альбатростың жылдамдығы; s — бастапқы қашықтық.

Табу керек. l — альбатростың ұшып өткен жолы.

Идея. Бұл — атақты «шыбын мен велосипедшілер» есебі. Альбатрос қайықтар арасында қанша рет ары-бері ұшқанын санаудың **қажеті жоқ**: ол қайықтар кездескенге дейінгі бүкіл уақытта тұрақты v жылдамдықпен ұшады. Сондықтан алдымен **уақытты** табамыз.

Шешуі.

1. Қайықтар бір-біріне $(v_1 + v_2)$ жылдамдықпен жақындайды, олардың арасы s . Кездесу уақыты:

$$t = s / (v_1 + v_2).$$

2. Дәл сол t уақыт ішінде альбатрос та үздіксіз ұшады — бағытын қанша рет өзгертсе де, жылдамдығының модулі v :

$$l = v \cdot t = vs / (v_1 + v_2).$$

Мысал. $s = 20$ км, $v_1 = v_2 = 10$ км/сағ, $v = 30$ км/сағ болса: $t = 1$ сағ, $l = 30$ км.

Әдістемелік ескерту. Есепті «шексіз қатарды қосу» арқылы да шығаруға болады, бірақ бұл — ұзақ жол. Сұрақты «қайда ұшты?» емес, «қанша уақыт ұшты?» деп қою — кинематиканың ең пайдалы дағдыларының бірі.

Жауабы. $l = vs / (v_1 + v_2)$.

4

Бір-біріне жақындаған ғарыш станциялары мен пошта контейнерлері

Салыстырмалы қозғалыс · Орташа · Гончаренко № 4

Жауабы. $n = (v + v_1)t / (v_1 \Delta t) = 6$ контейнер

Берілгені. $v = 8 \cdot 10^3$ км/сағ — станциялардың жақындау жылдамдығы; $\Delta t = 20$ мин = $1/3$ сағ; $v_1 = 8 \cdot 10^3$ км/сағ — контейнердің бірінші станцияға қатысты жылдамдығы; $t = 1$ сағ.

Табу керек. n — бір сағатта қабылданатын контейнерлер саны.

Идея. Контейнерлер бірінен соң бірі бірдей Δt аралықпен жіберіледі, сондықтан кеңістікте олар **бірдей қашықтықта** тізіліп келеді. Екінші станция осы «тізбекті» қандай жылдамдықпен кесіп өтетінін тапсақ жеткілікті. Бұл — Доплер эффектісінің ең қарапайым, механикалық түрі.

Шешуі.

1. Барлық есепті **бірінші станцияның санақ жүйесінде** жүргіземіз. Мұнда әр контейнер v_1 жылдамдықпен ұшады, ал көрші екі контейнердің арасы:

$$L = v_1 \cdot \Delta t = 8 \cdot 10^3 \cdot (1/3) \approx 2,67 \cdot 10^3 \text{ км.}$$

2. Осы жүйеде екінші станция v жылдамдықпен жақындайды, ал контейнерлер оған қарсы v_1 жылдамдықпен ұшады. Демек контейнер мен екінші станцияның **жақындау жылдамдығы**:

$$v_{\text{сал}} = v + v_1 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ км/сағ.}$$

3. t уақыт ішінде екінші станция контейнерлер тізбегінің бойымен $v_{\text{сал}} \cdot t$ қашықтыққа ілгерілейді, ал әр контейнер сайын L км кетеді:

$$n = (v + v_1) \cdot t / (v_1 \cdot \Delta t) = 1,6 \cdot 10^4 \cdot 1 / (8 \cdot 10^3 \cdot 1/3) = 6.$$

Талдау. Егер станциялар қозғалмаса ($v = 0$), командир сағатына 3 контейнер алар еді — дәл жіберілген жиілікпен. Жақындау есебінен қабылдау жиілігі екі есе артты.

Жауабы. $n = (v + v_1)t / (v_1 \Delta t) = 6$ контейнер.

5

Барып-қайтқан автомобильдің орташа жылдамдығы

Орташа жылдамдық · Орташа · Гончаренко № 5

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 2v_1v_3 / (2v_3 + v_1 - v_2)$

Берілгені. Барғанда: уақыты t_1 , жылдамдығы v_1 . Қайтқанда: алдымен t_1 уақыт бойы v_2 жылдамдықпен, содан соң қалған жолды v_3 жылдамдықпен.

Табу керек. $v_{\text{орт}}$.

Идея. Орташа жылдамдық — әрқашан **бүкіл жолдың бүкіл уақытқа қатынасы**, жылдамдықтардың орташа мәні емес:

$$v_{\text{орт}} = s_{\text{толық}} / t_{\text{толық}}.$$

Шешуі.

1. Қалалар арасы: $s = v_1 t_1$. Барып-қайтқан толық жол: $s_{\text{толық}} = 2v_1 t_1$.

2. Қайту жолының бірінші бөлігі: $s' = v_2 t_1$. Қалған бөлігі мен оған кеткен уақыт:

$$s'' = s - s' = (v_1 - v_2)t_1, \quad t_3 = (v_1 - v_2)t_1 / v_3.$$

3. Толық уақыт — үш мүшеден тұрады: барғандағы t_1 , қайтқандағы t_1 және t_3 :

$$t_{\text{толық}} = 2t_1 + (v_1 - v_2)t_1 / v_3 = t_1 \cdot (2v_3 + v_1 - v_2) / v_3.$$

4. Орташа жылдамдық:

$$v_{\text{орт}} = 2v_1 t_1 \cdot v_3 / [t_1 (2v_3 + v_1 - v_2)] = 2v_1 v_3 / (2v_3 + v_1 - v_2).$$

Тексеру. $v_1 = v_2 = v_3 = v$ болса, $v_{\text{орт}} = 2v^2 / (2v + v - v) = v$ ✓ — бұл автомобиль бүкіл жолды бірқалыпты жүрген жағдай.

Ескерту. Кейбір жинақтарда бұл есептің жауабы $2v_1 v_3 / (v_3 + v_1 - v_2)$ түрінде берілген. Ол дұрыс емес: жоғарыдағы тексеруде мұндай өрнек v орнына $2v$ береді. Бөлімдегі v_3 алдындағы 2 —

барғандағы және қайтқандағы екі t_1 уақытынан шығады.

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 2v_1v_3 / (2v_3 + v_1 - v_2)$.

6

Жолдың үш бөлігін әртүрлі жылдамдықпен жүрген пойыз

Орташа жылдамдық · Орташа · Гончаренко № 6

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 12v_1v_2 / [5(v_1 + v_2)] = 72 \text{ км/сағ}$

Берілгені. $v_1 = 50 \text{ км/сағ}$, $v_2 = 75 \text{ км/сағ}$, $v_3 = 2v_{12}$, мұндағы v_{12} — алғашқы екі бөліктегі орташа жылдамдық. Әр бөлік — $s/3$.

Табу керек. $v_{\text{орт}}$.

Идея. Есепті екі қадаммен шешеміз: алдымен алғашқы екі бөліктің орташа жылдамдығын (бұл — **гармониялық орта**), содан соң үш бөліктің бәрін қамтитын орташа жылдамдықты табамыз.

Шешуі.

1. Алғашқы екі бөліктің әрқайсысы $s/3$, оларға кеткен уақыт:

$$t_1 = s / (3v_1), \quad t_2 = s / (3v_2), \quad t_1 + t_2 = (s/3) \cdot (v_1 + v_2) / (v_1v_2).$$

Жүрілген жол $2s/3$, сондықтан

$$v_{12} = (2s/3) / (t_1 + t_2) = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2) = 2 \cdot 50 \cdot 75 / 125 = 60 \text{ км/сағ}.$$

2. Үшінші бөліктегі жылдамдық:

$$v_3 = 2v_{12} = 4v_1v_2 / (v_1 + v_2) = 120 \text{ км/сағ}, \quad t_3 = s / (3v_3).$$

3. Толық уақыт:

$$t = (s/3) \cdot [(v_1+v_2)/(v_1v_2) + (v_1+v_2)/(4v_1v_2)] = (s/3) \cdot (5/4) \cdot (v_1+v_2)/(v_1v_2) = 5s(v_1+v_2) / (12v_1v_2).$$

4. Демек

$$v_{\text{орт}} = s/t = 12v_1v_2 / [5(v_1 + v_2)] = 12 \cdot 50 \cdot 75 / (5 \cdot 125) = 72 \text{ км/сағ}.$$

Сандық тексеру. $s = 360 \text{ км}$ десек: $t_1 = 120/50 = 2,4 \text{ сағ}$; $t_2 = 120/75 = 1,6 \text{ сағ}$; $t_3 = 120/120 = 1 \text{ сағ}$.
Барлығы 5 сағ , $360/5 = 72 \text{ км/сағ}$ ✓

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 12v_1v_2 / [5(v_1 + v_2)] = 72 \text{ км/сағ}$.

7

Негізгі топтан үш айналымға озған велошабандоз

Орташа жылдамдық · Орташа · Гончаренко № 7

Жауабы. $v \approx 46,4 \text{ км/сағ}$

Берілгені. Көшбасшы $N_1 = 100$ айналым жүріп өткенде, топ $N_2 = 100 - 3 = 97$ айналым жүрді;
 $v_{\text{топ}} = 45$ км/сағ.

Табу керек. $v_{\text{көш}}$.

Идея. Көшбасшы мен топ **бір уақыт** ішінде әртүрлі жол жүрді. Бірдей уақытта жүрілген жолдар жылдамдықтарға тура пропорционал.

Шешуі.

1. Бір айналымның ұзындығы L болсын. Сол t уақыт ішінде:

$$v_{\text{көш}} \cdot t = 100L, \quad v_{\text{топ}} \cdot t = 97L.$$

2. Бірін екіншісіне бөлеміз — L мен t қысқарады:

$$v_{\text{көш}} / v_{\text{топ}} = 100 / 97.$$

3. Демек

$$v_{\text{көш}} = v_{\text{топ}} \cdot 100/97 = 45 \cdot 100/97 \approx 46,4 \text{ км/сағ.}$$

Талдау. Жылдамдық небәрі 3,1 %-ға ғана артық — жүз айналымда үш айналымға озу үшін осы да жеткілікті. Ұзақ жарыстарда шағын артықшылықтың қалай жинақталатынын көрсететін жақсы мысал.

Жауабы. $v_{\text{көш}} \approx 46,4$ км/сағ.

8

Жолдары мен уақыттары қатынаспен берілген пойыз

Орташа жылдамдық · Орташа · Гончаренко № 8

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 40$ км/сағ

Берілгені. $s_1 : s_2 : s_3 : s_4 = 1 : 3 : 4 : 2$; $t_1 : t_2 : t_3 : t_4 = 2 : 4 : 3 : 1$; $v_4 = 80$ км/сағ.

Табу керек. $v_{\text{орт}}$.

Идея. Қатынастарды **пропорция коэффициенттері** арқылы жазамыз: $s_i = k \cdot (1, 3, 4, 2)$ және $t_i = m \cdot (2, 4, 3, 1)$. Сонда белгісіз екеу ғана — k және m , ал берілген v_4 солардың қатынасын береді.

Шешуі.

1. Соңғы бөлік: $s_4 = 2k$, $t_4 = m$. Демек

$$v_4 = 2k / m = 80 \text{ км/сағ} \Rightarrow k / m = 40 \text{ км/сағ.}$$

2. Толық жол мен толық уақыт:

$$s = k(1 + 3 + 4 + 2) = 10k, \quad t = m(2 + 4 + 3 + 1) = 10m.$$

3. Сондықтан

$$v_{\text{орт}} = s / t = 10k / 10m = k/m = 40 \text{ км/сағ.}$$

Талдау. Екі қатынастағы мүшелердің қосындысы бірдей болып шықты (10 және 10), сондықтан жауап тікелей k/m -ге тең. Сандық тексеру: $k = 40$ км, $m = 1$ сағ десек, жолдар 40, 120, 160, 80 км (барлығы 400 км), уақыттар 2, 4, 3, 1 сағ (барлығы 10 сағ), бөліктердегі жылдамдықтар 20; 30; 53,3 және 80 км/сағ; $400/10 = 40$ км/сағ ✓

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 40$ км/сағ.

9

Екі турист және бір велосипед

Орташа жылдамдық · Күрделі · Гончаренко № 9

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2)$; екінші жағдайда орташа жылдамдық артады

Берілгені. Жолдың ұзындығы L ; велосипед жылдамдығы v_1 , жаяу жүру жылдамдығы v_2 ($v_1 > v_2$). Екі турист бір мезгілде шығып, бір мезгілде жетеді.

Табу керек. $v_{\text{орт}}$, сондай-ақ екінші сценарийдегі өзгерісті сапалық бағалау.

Идея. Велосипед қалдырылатын нүктенің орнын x деп белгілеп, «екеуі де бір мезгілде жетеді» шартынан x -ті табамыз.

1-бөлім.

1. Бірінші турист x жолды велосипедпен, қалған $(L - x)$ жолды жаяу жүреді; екіншісі керісінше — x жолды жаяу, $(L - x)$ жолды велосипедпен:

$$x/v_1 + (L-x)/v_2 = x/v_2 + (L-x)/v_1.$$

2. Мүшелерін топтасақ:

$$(2x - L)/v_1 = (2x - L)/v_2.$$

$v_1 \neq v_2$ болғандықтан бұл тек $2x - L = 0$ болғанда орындалады, яғни

$$x = L/2 \text{ — велосипед жолдың дәл ортасында қалдырылады.}$$

3. Әрқайсысының уақыты мен орташа жылдамдығы:

$$t = L/(2v_1) + L/(2v_2) = L(v_1 + v_2) / (2v_1v_2),$$

$$v_{\text{орт}} = L/t = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2).$$

Бұл — v_1 мен v_2 -нің **гармониялық ортасы**; ол әрқашан арифметикалық ортадан кіші.

2-бөлім (сапалық).

Бірінші сценарийде велосипед жол бойында **бос жатады**: бірінші турист оны тастаған сәттен екінші турист келгенге дейін ол ешкімді тасымайды. Екінші сценарийде үшінші турист велосипедті кері алып келеді, сондықтан велосипед бүкіл уақыт бойы қозғалыста болады және екі туристке **көбірек «велосипед-километр»** үлестіреді. Әрқайсысының велосипедпен жүрген жолы $L/2$ -ден үлкен, жаяу жүрген жолы кіші болады, демек

$$v_{\text{орт}} (2\text{-жағдай}) > 2v_1v_2 / (v_1 + v_2).$$

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 2v_1v_2/(v_1 + v_2)$; екінші жағдайда орташа жылдамдық **үлкенірек** болады.

10

Жылдамдығын екі есе арттырған мотоциклші

Орташа жылдамдық · Оңай · Гончаренко № 10

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 48$ км/сағ

Берілгені. $s_1 = s$, $v_1 = 40$ км/сағ; $s_2 = s/2$, $v_2 = 80$ км/сағ.

Табу керек. $v_{\text{орт}}$.

Идея. Тағы да $v_{\text{орт}} = s_{\text{толық}} / t_{\text{толық}}$. Жолдар тең болмағандықтан гармониялық орта формуласын тікелей қолдануға болмайды — уақыттарды бөлек санау керек.

Шешуі.

1. Уақыттар:

$$t_1 = s / 40, \quad t_2 = (s/2) / 80 = s / 160.$$

2. Қосындылар:

$$s_{\text{толық}} = s + s/2 = 1,5s, \quad t_{\text{толық}} = s/40 + s/160 = 5s/160 = s/32.$$

3. Орташа жылдамдық:

$$v_{\text{орт}} = 1,5s / (s/32) = 1,5 \cdot 32 = 48 \text{ км/сағ}.$$

Сандық тексеру. $s = 160$ км десек: 160 км — 4 сағ, 80 км — 1 сағ. Барлығы 240 км / 5 сағ = 48 км/сағ ✓

Жиі кездесетін қате. $(40 + 80)/2 = 60$ км/сағ деп жауап беру. Бұл — жылдамдықтардың арифметикалық ортасы; ол тек **уақыттары** тең болғанда ғана дұрыс.

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 48$ км/сағ.

11

Жолдың жартысы шоссе, жартысы грунт жол

Орташа жылдамдық · Оңай · Гончаренко № 11

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 45 \text{ км/сағ}$ **Берілгені.** $v_1 = 90 \text{ км/сағ}$, $v_2 = 30 \text{ км/сағ}$, жол бөліктері тең: $s/2$.**Табу керек.** $v_{\text{орт}}$.**Шешуі.**

1. Әр бөлікке кеткен уақыт:

$$t_1 = s / (2v_1), \quad t_2 = s / (2v_2).$$

2. Толық уақыт:

$$t = (s/2) \cdot (1/v_1 + 1/v_2) = s(v_1 + v_2) / (2v_1v_2).$$

3. Орташа жылдамдық — **гармониялық орта**:

$$v_{\text{орт}} = s/t = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2) = 2 \cdot 90 \cdot 30 / 120 = 45 \text{ км/сағ}.$$

Талдау. Арифметикалық орта $(90 + 30)/2 = 60 \text{ км/сағ}$ болар еді. Бірақ автомобиль баяу бөлікте **үш есе көп уақыт** өткізеді, сондықтан нәтиже баяу жылдамдыққа қарай ығысады. Жалпы ереже: жолдың тең бөліктерінде — гармониялық орта, уақыттың тең бөліктерінде — арифметикалық орта.

Жауабы. $v_{\text{орт}} = 45 \text{ км/сағ}$.

12

Жаяу, автобуспен және электричкамен жүрген туристер

Орташа жылдамдық · Орташа · Гончаренко № 12

Жауабы. $v_1 = 4 \text{ км/сағ}$; $v_2 = 64 \text{ км/сағ}$; $v_3 = 36 \text{ км/сағ}$ **Берілгені.** $v_{\text{орт}} = 32 \text{ км/сағ}$; $s_1 : s_2 : s_3 = 1 : 4 : 45$; $t_1 : t_2 : t_3 = 4 : 1 : 20$.**Табу керек.** v_1, v_2, v_3 .

Идея. Бұл — 8-есептің кері нұсқасы: мұнда орташа жылдамдық берілген, ал бөліктердегі жылдамдықтарды табу керек. Тағы да пропорция коэффициенттерін енгіземіз.

Шешуі.1. $s_i = k \cdot (1, 4, 45)$ және $t_i = m \cdot (4, 1, 20)$ деп жазамыз.

2. Толық жол мен толық уақыт:

$$s = k(1 + 4 + 45) = 50k, \quad t = m(4 + 1 + 20) = 25m.$$

3. Орташа жылдамдық шартынан k/m қатынасын табамыз:

$$v_{\text{орт}} = 50k / 25m = 2k/m = 32 \text{ км/сағ} \Rightarrow k/m = 16 \text{ км/сағ}.$$

4. Енді әр бөліктің жылдамдығы:

$$v_1 = s_1/t_1 = k/(4m) = 16/4 = 4 \text{ км/сағ (жаяу)},$$

$$v_2 = s_2/t_2 = 4k/m = 4 \cdot 16 = 64 \text{ км/сағ (автобус)},$$

$$v_3 = s_3/t_3 = 45k/(20m) = 2,25 \cdot 16 = 36 \text{ км/сағ (электричка)}.$$

Тексеру. $k = 16 \text{ км}$, $m = 1 \text{ сағ}$ десек: жолдар 16, 64, 720 км (барлығы 800 км), уақыттар 4, 1, 20 сағ (барлығы 25 сағ); $800/25 = 32 \text{ км/сағ} \checkmark$

Жауабы. $v_1 = 4 \text{ км/сағ}$; $v_2 = 64 \text{ км/сағ}$; $v_3 = 36 \text{ км/сағ}$.

13

Өзеннен су алып, алауды сөндіру: ең аз уақыт

Экстремум есептері · Күрделі · Гончаренко № 13

Жауабы. $t = 15 \text{ с}$

Берілгені. $AD = 6 \text{ м}$ (адамнан жағаға дейін), $BC = 34 \text{ м}$ (алаудан жағаға дейін), $DC = 30 \text{ м}$, $v = 5 \text{ м/с}$, $\tau = 5 \text{ с}$.

Табу керек. $t_{\text{мин}}$.

Идея. Жылдамдық тұрақты болғандықтан, уақытты азайту — **жолды азайту** деген сөз. Адам жағаның бір нүктесіне (O) барып, содан алауға баруы керек: жол $AO + OB$. Мұндай есепті **шағылу (симметрия) әдісі** бірден шешеді: A нүктесін жағаға қатысты айнадағыдай көшіріп, A_1 нүктесін аламыз. Сонда $AO = A_1O$, демек

$$AO + OB = A_1O + OB \geq A_1B,$$

ал теңдік тек A_1 , O, B бір түзудің бойында жатқанда орындалады. Бұл — жарықтың шағылу заңының («түсу бұрышы = шағылу бұрышы») механикадағы дәл көшірмесі.

Шешуі.

1. A_1 нүктесі жағаның арғы жағында, одан 6 м қашықтықта жатады. Сонда A_1 мен B нүктелерінің жағаға перпендикуляр бағыттағы арақашықтығы:

$$AD + BC = 6 + 34 = 40 \text{ м},$$

ал жаға бойымен — $DC = 30 \text{ м}$.

2. Пифагор теоремасы бойынша ең қысқа жол:

$$s_{\text{мин}} = A_1B = \sqrt{DC^2 + (AD + BC)^2} = \sqrt{(30^2 + 40^2)} = \sqrt{(900 + 1600)} = \sqrt{2500} = 50 \text{ м.}$$

3. Толық уақыт — жүгіру уақыты плюс су құю уақыты:

$$t_{\text{мин}} = s_{\text{мин}} / v + \tau = 50 / 5 + 5 = 10 + 5 = 15 \text{ с.}$$

Талдау. Су алатын О нүктесінің орнын да табуға болады: ұқсас үшбұрыштардан $DO / DC = AD / (AD + BC) = 6/40$, яғни $DO = 30 \cdot 0,15 = 4,5 \text{ м.}$ Адам өзінен ең жақын жағаға тіке жүгірмей, алауға қарай сәл ығысып барғаны тиімді.

Жауабы. $t_{\text{мин}} = 15 \text{ с.}$

14

Алға озып кетіп, серігіне қайта оралған велосипедші

Салыстырмалы қозғалыс · Орташа · Гончаренко № 14

Жауабы. $t = 2l / (v_1 + v_2) = 15 \text{ мин}$

Берілгені. $v_1 = 35 \text{ км/сағ}$, $v_2 = 45 \text{ км/сағ}$, $l = 10 \text{ км.}$

Табу керек. t — толық уақыт.

Идея. Қозғалысты екі кезеңге бөлеміз: озу және қайта оралу. Екеуінде де бірінші велосипедші бірқалыпты v_1 жылдамдықпен жүре береді.

Шешуі.

1. Бірінші кезең. Екінші велосипедші $l = 10 \text{ км}$ жүреді:

$$t_a = l / v_2 = 10 / 45 \text{ сағ} = 2/9 \text{ сағ} \approx 13 \text{ мин } 20 \text{ с.}$$

Осы уақытта олардың арақашықтығы $(v_2 - v_1)$ жылдамдықпен өседі:

$$\Delta s = (v_2 - v_1) \cdot t_a = 10 \cdot (10/45) = 100/45 \text{ км} \approx 2,22 \text{ км.}$$

2. Екінші кезең. Ол бұрылған соң екеуі бір-біріне $(v_1 + v_2)$ жылдамдықпен жақындайды:

$$t_b = \Delta s / (v_1 + v_2) = (100/45) / 80 = 1/36 \text{ сағ} \approx 1 \text{ мин } 40 \text{ с.}$$

3. Толық уақыт:

$$t = t_a + t_b = 2/9 + 1/36 = 8/36 + 1/36 = 9/36 = 1/4 \text{ сағ} = 15 \text{ мин.}$$

Әдемі жалпы шешім. Әріптік түрде есептесек, ықшамдаулардан кейін бөлек-бөлек уақыттар түгел қысқарып, өте қарапайым өрнек қалады:

$$t = (l/v_2) \cdot [1 + (v_2 - v_1)/(v_1 + v_2)] = (l/v_2) \cdot (2v_2)/(v_1 + v_2) = 2l / (v_1 + v_2).$$

Тексеру: $2 \cdot 10 / 80 = 0,25$ сағ = 15 мин ✓ Назар аударыңыз: жауапта v_2 мүлде жоқ — тек қосынды $v_1 + v_2$ бар.

Жауабы. $t = 2l/(v_1 + v_2) = 15$ мин.

15

Жаяу жүргінші мен оны қуып жеткен автомобиль

Салыстырмалы қозғалыс · Оңай · Гончаренко № 15

Жауабы. $s = 30$ км

Берілгені. $s_1 = 27$ км; $v_{\text{авт}} = 10v$ (v — жаяу жүргіншінің жылдамдығы); екеуі бір мезгілде жетеді.

Табу керек. s — қалалар арасындағы қашықтық.

Идея. Автомобиль шыққан сәттен бастап санасақ, екеуі де **бірдей уақыт** жүреді: жаяу жүргінші қалған $(s - 27)$ км-ді, автомобиль толық s км-ді.

Шешуі.

1. Уақыттарды теңестіреміз:

$$(s - 27) / v = s / (10v).$$

2. v қысқарады, айқастыра көбейтеміз:

$$10(s - 27) = s \Rightarrow 10s - 270 = s \Rightarrow 9s = 270 \Rightarrow s = 30 \text{ км.}$$

Тексеру. $v = 5$ км/сағ десек: жаяу жүргіншіге қалған 3 км-ге 0,6 сағ керек; автомобиль 50 км/сағ жылдамдықпен 30 км-ді 0,6 сағатта жүреді ✓

Талдау. Жаяу жүргінші жолдың $27/30 = 90\%$ бөлігін жалғыз жүріп үлгерген; автомобиль оны дәл финишта қуып жетті.

Жауабы. $s = 30$ км.

16

Құтқару шеңберін қуып жеткен катер

Ағыстағы қозғалыс · Орташа · Гончаренко № 16

Жауабы. $v_{\text{ағыс}} = 5$ км/сағ

Берілгені. $t_1 = 30$ мин = 0,5 сағ (қуып жеткеннен бұрылғанға дейін); $l = 5$ км — екі кездесу нүктесінің арасы (жағамен өлшенген).

Табу керек. $v_{\text{ағыс}}$.

Идея. Есептің кілті — **суға байланысқан санақ жүйесіне** көшу. Ол жүйеде:

- шеңбер мүлде қозғалмайды (ол ағыспен бірге жүзеді);

- катердің қозғалтқыш қуаты өзгермегендіктен, оның суға қатысты жылдамдығы модулі бойынша тұрақты — u .

Шешуі.

1. Су жүйесінде катер шеңберден 30 мин бойы u жылдамдықпен алшақтайды, содан соң дәл сондай жылдамдықпен кері қайтады. Демек ол шеңберге оралуға да нақ 30 мин жұмсайды:

$$t = t_1 + t_2 = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ сағ.}$$

Бұл ағыстың жылдамдығына, катердің жылдамдығына да тәуелді емес — тек симметриядан шығады.

2. Енді жағаға қайта ораламыз. Осы 1 сағат ішінде шеңбер ағыспен бірге 5 км жылжыды — және дәл сол жерде екінші кездесу болды. Демек

$$v_{\text{ағыс}} = l / t = 5 / 1 = 5 \text{ км/сағ.}$$

Талдау. Катердің өз жылдамдығы есепте мүлде қажет болмады. Дұрыс санақ жүйесін таңдау есепті бірнеше жолдық теңдеулер жүйесінен екі жолға дейін қысқартады.

Жауабы. $v_{\text{ағыс}} = 5 \text{ км/сағ.}$

17

Жаяу жүргіншіні басып озған және қарсы кездескен трамвайлар

Салыстырмалы қозғалыс · Орташа · Гончаренко № 17

Жауабы. $T = 2t_1t_2/(t_1 + t_2) = 5 \text{ мин } 50 \text{ с}$

Берілгені. $t_1 = 7 \text{ мин}$ (басып озу аралығы), $t_2 = 5 \text{ мин}$ (қарсы кездесу аралығы).

Табу керек. T — трамвайлардың жүру аралығы.

Идея. Трамвайлар бірдей T аралықпен шығатындықтан, көрші екі трамвайдың арасы жолда тұрақты:

$$L = u \cdot T,$$

мұндағы u — трамвайдың жылдамдығы. Жаяу жүргіншіге бұл алшақтық салыстырмалы жылдамдықпен жабылады.

Шешуі.

1. Жаяу жүргіншінің жылдамдығы v болсын. Артынан қуып жеткен трамвай оған $(u - v)$ жылдамдықпен жақындайды, қарсы келгені — $(u + v)$ жылдамдықпен:

$$L = (u - v) \cdot t_1 = (u + v) \cdot t_2.$$

2. Сандарды қойсақ: $7(u - v) = 5(u + v) \Rightarrow 7u - 7v = 5u + 5v \Rightarrow 2u = 12v$, яғни $u = 6v$ — трамвай жаяу жүргіншіден алты есе жылдам.

3. Енді $L = uT$ теңдігін пайдаланамыз:

$$uT = (u - v)t_1 = (6v - v) \cdot 7 = 35v \Rightarrow T = 35v / (6v) = 35/6 \text{ мин.}$$

$$T = 5 \text{ мин } 50 \text{ с.}$$

Жалпы формула. Екі өрнектен u мен v -ні шығарып тастасақ:

$$T = 2t_1t_2 / (t_1 + t_2) = 2 \cdot 7 \cdot 5 / 12 = 35/6 \text{ мин } \checkmark$$

Яғни жүру аралығы — t_1 мен t_2 -нің **гармониялық ортасы**, ол әрқашан осы екеуінің арасында жатады.

Жауабы. $T = 2t_1t_2/(t_1 + t_2) \approx 5 \text{ мин } 50 \text{ с.}$

18

Жаяу жүргінші, велосипедші және мотоциклші

Салыстырмалы қозғалыс · Күрделі · Гончаренко № 18

Жауабы. $x = 10 \text{ км}$

Берілгені. $t = 0$ сәтінде велосипедші мен мотоциклші бір нүктеде, жаяу жүргінші олардан $d = 10$ км алда. t_1 сәтінде мотоциклші жаяу жүргіншіні қуып жетті, сол кезде велосипедші олардан 5 км артта.

Табу керек. x — велосипедші жаяу жүргіншіні қуып жеткен t_2 сәтіндегі мотоциклші мен жаяу жүргіншінің арақашықтығы.

Идея. Үш дененің жылдамдықтарын жеке-жеке табудың қажеті жоқ — тек **жылдамдықтар айырмасымен** жұмыс істейміз. Барлық арақашықтық осы айырмалар арқылы өрнектеледі.

Шешуі.

1. v_M, v_B, v_J — мотоциклші, велосипедші, жаяу жүргіншінің жылдамдықтары. t_1 сәтінде мотоциклші жаяу жүргіншіні қуып жетті:

$$(v_M - v_J) \cdot t_1 = 10 \text{ км. (1)}$$

2. Сол сәтте велосипедші мотоциклшіден 5 км артта (екеуі де бір нүктеден шыққан):

$$(v_M - v_B) \cdot t_1 = 5 \text{ км. (2)}$$

3. (1) мен (2)-ні салыстырсақ: $v_M - v_B = \frac{1}{2}(v_M - v_J)$. Ал

$$v_B - v_J = (v_M - v_J) - (v_M - v_B) = \frac{1}{2}(v_M - v_J),$$

яғни велосипедші жаяу жүргіншіге мотоциклшіден **дәл екі есе баяу** жақындайды.

4. Сондықтан велосипедші сол 10 км-ді екі есе ұзақ жабады:

$$t_2 = 10 / (v_{\text{в}} - v_{\text{ж}}) = 2 \cdot 10 / (v_{\text{м}} - v_{\text{ж}}) = 2t_1.$$

5. Мотоциклші мен велосипедшінің арақашықтығы ($v_{\text{м}} - v_{\text{в}}$) жылдамдықпен өседі, сондықтан $t_2 = 2t_1$ сәтінде ол (2)-дегіден екі есе үлкен:

$$\Delta = (v_{\text{м}} - v_{\text{в}}) \cdot t_2 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ км.}$$

Ал бұл сәтте велосипедші мен жаяу жүргінші бір нүктеде тұр, демек мотоциклші жаяу жүргіншіден де 10 км алда.

$$x = 10 \text{ км.}$$

Жауабы. $x = 10 \text{ км.}$

19

Жаттықтырушыны кездестірген соң кері бұрылған спортшылар колоннасы

Салыстырмалы қозғалыс · Күрделі · Гончаренко № 19

$$\textbf{Жауабы. } l = l_0(v - u)/(v + u)$$

Берілгені. l_0 — бастапқы колонна ұзындығы; v — спортшылардың жылдамдығы; u — жаттықтырушының жылдамдығы, $u < v$.

Табу керек. l — барлығы бұрылған соңғы колонна ұзындығы.

Идея. Колоннаның жаңа ұзындығы — **бірінші** (ең ерте бұрылған) және **соңғы** (ең кеш бұрылған) спортшылардың арақашықтығы, соңғысы бұрылған дәл сол сәтте өлшенген. Демек екі санды табу керек: жаттықтырушының колоннаны кесіп өту уақыты және сол уақыттағы ығысулар.

Шешуі.

1. Спортшылардың бастапқы қозғалыс бағытын оң деп алайық. $t = 0$ сәтінде жаттықтырушы колоннаның **алдыңғы** басымен қатарласты; оны координаталар басы етеміз. Сонда:

- жаттықтырушы: $x_{\text{ж}} = -u \cdot t$;
- колоннаның соңғы спортшысы: $x_{\text{с}} = -l_0 + v \cdot t$.

2. Олар кездескенде $x_{\text{ж}} = x_{\text{с}}$:

$$-u \cdot T = -l_0 + v \cdot T \Rightarrow T = l_0 / (v + u).$$

Бұл күтілгендей: колонна жүйесінде жаттықтырушы $(v + u)$ жылдамдықпен жақындайды.

3. T сәтіндегі екі шеткі спортшының орны:

- бірінші спортшы $t = 0$ -де бұрылып, T уақыт бойы кері жүгірді: $x_1 = -v \cdot T$;
- соңғы спортшы дәл сол сәтте жаттықтырушымен қатарласты: $x_2 = -u \cdot T$.

4. Колоннаның жаңа ұзындығы:

$$l = |x_2 - x_1| = (v - u) \cdot T = l_0 \cdot (v - u) / (v + u).$$

Талдау. $u < v$ болғандықтан $l < l_0$ — колонна **қысқарады**. Шектік жағдайлар: $u \rightarrow 0$ болса $l \rightarrow l_0$ (қозғалмай тұрған жаттықтырушы колоннаны өзгертпейді), ал $u \rightarrow v$ болса $l \rightarrow 0$ (барлық спортшылар іс жүзінде бір сәтте бұрылады).

Жауабы. $l = l_0(v - u)/(v + u)$.

20

Каналмен бе, әлде өзенмен бе: қайсысы тезірек?

Ағыстағы қозғалыс · Орташа · Гончаренко № 20

Жауабы. Каналмен (тынық сумен) тезірек барып қайтады

Берілгені. $s = 12$ км (әр жолдың ұзындығы), $u = 16$ км/сағ — қайықтың суға қатысты жылдамдығы. Каналда су қозғалмайды, өзенде ағыс жылдамдығы v (берілмеген, $v > 0$).

Табу керек. Қай жолдың уақыты аз.

Идея. Ағыс барғанда көмектеседі, қайтқанда кедергі келтіреді. Бірінші қарағанда «бірін-бірі өтейді» сияқты көрінеді, бірақ қайық **баяу жылдамдықпен көбірек уақыт** жүреді, сондықтан жоғалту әрқашан ұтыстан басым.

Шешуі.

1. Канал (тынық су). Екі бағытта да жылдамдық u :

$$t_{\text{к}} = 2s / u = 24 / 16 = 1,5 \text{ сағ.}$$

2. Өзен. Ағыспен: $u + v$, ағысқа қарсы: $u - v$ (қайық жүзе алуы үшін $v < u$ болуы керек):

$$t_{\text{ө}} = s/(u + v) + s/(u - v) = s \cdot [(u - v) + (u + v)] / (u^2 - v^2) = 2su / (u^2 - v^2).$$

3. Екеуін салыстырамыз:

$$t_{\text{ө}} / t_{\text{к}} = [2su/(u^2 - v^2)] \cdot [u/(2s)] = u^2 / (u^2 - v^2).$$

$v > 0$ болғандықтан $u^2 - v^2 < u^2$, демек бұл қатынас **бірден үлкен**:

$$t_{\text{ө}} > t_{\text{к}} \text{ (кез келген } v > 0 \text{ үшін).}$$

Талдау. Жауап ағыстың жылдамдығына тәуелсіз — сондықтан есепте v берілмеген де. Мысалы $v = 8$ км/сағ болса: $t_{\text{ө}} = 2 \cdot 12 \cdot 16 / (256 - 64) = 2$ сағ, яғни каналдан 30 мин ұзақ. $v \rightarrow u$ болғанда $t_{\text{ө}} \rightarrow \infty$: қайық ағысқа қарсы мүлде қозғала алмай қалады.

Жауабы. Қайық **каналмен** (тынық сумен) тезірек барып қайтады.

21

Автомобиль мен өгіз арба: турист уақыт үнемдегі ме?

Орташа жылдамдық · Оңай · Гончаренко № 21

Жауабы. Жоқ — ол жаяу жүргеннен 5 % көп уақыт жұмсады

Берілгені. Жол ұзындығы s ; жаяу жүру жылдамдығы v . Бірінші жартысы: $v_1 = 10v$; екінші жартысы: $v_2 = v/2$.

Табу керек. $t_{\text{нақты}}$ мен $t_{\text{жаяу}} = s/v$ қайсысы кіші.

Идея. Тез жүрген бөлікте **уақыт аз** жұмсалады, сондықтан ол пайда аз береді; ал баяу жүрген бөлікте уақыт көп жоғалады. Осы асимметрияны сандармен көрсетеміз.

Шешуі.

1. Екі бөліктің уақыты:

$$t_1 = (s/2) / (10v) = s / (20v), \quad t_2 = (s/2) / (v/2) = s / v.$$

2. Толық уақыт:

$$t = s/(20v) + s/v = (s/v) \cdot (1/20 + 1) = 1,05 \cdot s/v.$$

3. Ал бүкіл жолды жаяу жүрсе: $t_{\text{жаяу}} = s/v$. Демек

$$t = 1,05 \cdot t_{\text{жаяу}} > t_{\text{жаяу}}.$$

Талдау. Автомобиль жолдың жартысын жаяу жүргендегі уақыттың небәрі $1/20$ бөлігінде өтті — яғни ең көп дегенде $0,45 \cdot (s/v)$ уақыт үнемдеуге болатын еді. Ал өгіз арба сол жартысын екі есе ұзақ, яғни $0,5 \cdot (s/v)$ уақыт артық жүрді. Жоғалту ұтыстан басым.

Қорытынды ереже. Жолдың тең бөліктерінде орташа жылдамдық — гармониялық орта: $v_{\text{орт}} = 2 \cdot 10v \cdot (v/2) / (10v + v/2) = 10v^2 / (10,5v) \approx 0,952v < v$.

Жауабы. Жоқ, турист уақыт **үнемдеген жоқ** — керісінше, 5 %-ға көп уақыт жұмсады.

22

Уақытты тең бөлген және жолды тең бөлген екі жаяу жүргінші

Орташа жылдамдық · Орташа · Гончаренко № 22

Жауабы. Бірінші жаяу жүргінші ерте жетеді ($v_1 \neq v_2$ болса)

Берілгені. Жол ұзындығы s . Бірінші жүргінші **уақытты** тең бөледі, екіншісі **жолды** тең бөледі.

Табу керек. Қайсысы бұрын жетеді.

Идея. Бұл есеп — кинематикадағы ең маңызды екі орташаның салыстыруы: **арифметикалық** және **гармониялық** орта.

Шешуі.

1. Бірінші жүргінші. Толық уақыты t болсын. Жүрген жолы:

$$s = v_1 \cdot (t/2) + v_2 \cdot (t/2) = t(v_1 + v_2)/2 \Rightarrow v_{\text{орт},1} = s/t = (v_1 + v_2)/2.$$

Бұл — **арифметикалық орта**.

2. Екінші жүргінші. Әр жарты жолға кеткен уақыт $s/(2v_2)$ және $s/(2v_1)$:

$$t' = (s/2) \cdot (1/v_1 + 1/v_2) = s(v_1 + v_2)/(2v_1v_2) \Rightarrow v_{\text{орт},2} = 2v_1v_2/(v_1 + v_2).$$

Бұл — **гармониялық орта**.

3. Екеуін салыстырамыз. Кез келген оң v_1, v_2 үшін

$$(v_1 + v_2)/2 - 2v_1v_2/(v_1 + v_2) = (v_1 - v_2)^2 / [2(v_1 + v_2)] \geq 0.$$

Теңдік тек $v_1 = v_2$ болғанда. Демек $v_1 \neq v_2$ болса $v_{\text{орт},1} > v_{\text{орт},2}$, яғни бірінші жүргіншінің орташа жылдамдығы артық.

Сандық мысал. $v_1 = 6$ км/сағ, $v_2 = 3$ км/сағ, $s = 12$ км:

бірінші — $v_{\text{орт}} = 4,5$ км/сағ, $t = 2$ сағ 40 мин;

екінші — $v_{\text{орт}} = 4$ км/сағ, $t' = 3$ сағ. Айырмасы 20 мин.

Себебі неде? Екінші жүргінші баяу жылдамдықта **көбірек уақыт** өткізеді (тең жолға көп уақыт кетеді), ал бірінші жүргінші жылдам және баяу режимдерде бірдей уақыт жүреді.

Жауабы. $v_1 \neq v_2$ болса, **бірінші** жаяу жүргінші В пунктіне ертерек жетеді; $v_1 = v_2$ болса — бір мезгілде.

23

Алматы — Талғар — Алматы: желді ме, тымық па?

Ағыстағы қозғалыс · Орташа · Гончаренко № 23

Жауабы. Тымық ауа райында аз уақыт жұмсайды

Берілгені. Бір бағыттағы қашықтық s ; велосипедшінің ауаға қатысты жылдамдығы u (екі бағытта да бірдей күш жұмсайды деп аламыз); желдің жылдамдығы v , ол маршрут бойымен соғады.

Табу керек. Қай жағдайда толық уақыт аз.

Идея. Бұл — 20-есептің дәл көшірмесі: ағыстың орнында жел тұр. Желмен жүргендегі ұтыс желге қарсы жүргендегі жоғалтуды **ешқашан өтемейді**, себебі баяу бөлікте көбірек уақыт өткізіледі.

Шешуі.

1. Тымық ауа райы ($v = 0$):

$$t_0 = 2s / u.$$

2. Желді ауа райы. Бір жақта жылдамдық $u + v$, екінші жақта $u - v$ (жүре алуы үшін $v < u$):

$$t = s/(u + v) + s/(u - v) = 2su / (u^2 - v^2).$$

3. Қатынасы:

$$t / t_0 = u^2 / (u^2 - v^2) > 1 \text{ (кез келген } v > 0 \text{ үшін).}$$

Сандық мысал. $u = 20$ км/сағ, $s = 20$ км. Тымықта: $t_0 = 2$ сағ. Жел $v = 10$ км/сағ болса: $20/30 + 20/10 = 0,67 + 2 = 2,67$ сағ, яғни 40 мин артық.

Физикалық түсінік. Желмен жүргенде велосипедші **аз уақыт** жылдам жүреді, ал желге қарсы **көп уақыт** баяу жүреді. Уақыт бойынша салмақталғанда баяу режим әрқашан басым түседі.

Жауабы. Велосипедші **тымық** ауа райында аз уақыт жұмсайды.

24

Екі сүңгуір қайық және гидролокатор сигналы

Салыстырмалы қозғалыс · Оңай · Гончаренко № 24

$$\text{Жауабы. } t = 2lu / (u^2 - v^2)$$

Берілгені. l — қайықтар арасы; v — екі қайықтың да жылдамдығы; u — дыбыстың судағы жылдамдығы (суға қатысты), $u > v$.

Табу керек. t — сигналдың барып-қайту уақыты.

Идея. Дыбыс суға қатысты u жылдамдықпен таралады — оның жылдамдығы көзінің қозғалысына тәуелді емес. Ал қайықтар қозғалып тұр, сондықтан **әр бағытта салыстырмалы жылдамдық басқаша**. Қайықтардың жылдамдықтары бірдей болғандықтан олардың арақашықтығы l өзгермейді.

Шешуі.

1. Алға (қуып жету). Сигнал u жылдамдықпен ұшады, алдыңғы қайық одан v жылдамдықпен қашады. Жақындау жылдамдығы $u - v$, бастапқы алшақтық l :

$$t_1 = l / (u - v).$$

2. Кері (қарсы қозғалыс). Шағылу сәтінде қайықтардың арасы әлі де l (екеуі бірдей жылдамдықпен жүзеді). Шағылған сигнал артқа u жылдамдықпен ұшады, ал артқы қайық оған қарсы v жылдамдықпен келеді:

$$t_2 = l / (u + v).$$

3. Толық уақыт:

$$t = t_1 + t_2 = l/(u - v) + l/(u + v) = l \cdot [(u + v) + (u - v)] / (u^2 - v^2) = 2lu / (u^2 - v^2).$$

Талдау. Қайықтар тоқтап тұрса ($v = 0$) уақыт $2l/u$ болар еді. Қозғалыс уақытты **ұзартады**: $t/t_0 = u^2/(u^2 - v^2) > 1$. Бұл — 20- және 23-есептердегі дәл сол теңсіздік.

Жауабы. $t = 2lu / (u^2 - v^2)$.

25

Эскалатормен жүгіріп түскен екі бала: баспалдақтарды санау

Эскалатор · Күрделі · Гончаренко № 25

Жауабы. $N = k_1 k_2 (n - 1) / (n k_1 - k_2)$; $v = u n (k_2 - k_1) / (n k_1 - k_2)$

Берілгені. Балалардың эскалаторға қатысты жылдамдықтары u және nu ; олар санаған баспалдақтар k_1 және k_2 ($k_2 > k_1$).

Табу керек. N — эскалатордың көрінетін бөлігіндегі баспалдақтар саны; v — эскалатордың жылдамдығы.

Идея (ең маңызды тұсы). Бала эскалаторға қатысты жылжыған жолында ғана жаңа баспалдақтарды басады. Эскалатормен бірге ығысқан бөлік санауға кірмейді. Сондықтан:

санаған баспалдақ = (эскалаторға қатысты жүрілген жол) $\times$ (бірлік ұзындықтағы баспалдақ саны).

Шешуі.

1. Эскалатордың ұзындығы l , баспалдақ тығыздығы N/l болсын. Бірінші баланың жердегі жылдамдығы $v + u$, түсу уақыты:

$$t_1 = l / (v + u).$$

Осы уақытта ол эскалатор бетімен $u \cdot t_1 = ul / (v + u)$ жол жүрді, демек

$$k_1 = [ul / (v + u)] \cdot (N/l) = uN / (v + u). \quad (1)$$

2. Екінші бала үшін дәл солай, $u \rightarrow nu$:

$$k_2 = nuN / (v + nu). \quad (2)$$

Эскалатордың l ұзындығы екі теңдеуден де шығып кетті — бұл есептің шешілетінінің белгісі.

3. (1)-ден: $v + u = uN/k_1$, демек $N/k_1 = (v + u)/u = 1 + v/u$.

(2)-ден: $v + nu = nuN/k_2$, демек $N/k_2 = (v + nu)/(nu) = 1 + v/(nu)$.

4. $w = v/u$ деп белгілейік. Сонда $N = k_1(1 + w)$ және $N = k_2(1 + w/n)$. Теңестіреміз:

$$k_1(1 + w) = k_2(1 + w/n) \Rightarrow k_1 + k_1w = k_2 + k_2w/n.$$

$$w(k_1 - k_2/n) = k_2 - k_1 \Rightarrow w = n(k_2 - k_1) / (nk_1 - k_2).$$

$$v = u \cdot n(k_2 - k_1) / (nk_1 - k_2).$$

5. Енді N:

$$N = k_1(1 + w) = k_1 \cdot [(nk_1 - k_2) + n(k_2 - k_1)] / (nk_1 - k_2) = k_1k_2(n - 1) / (nk_1 - k_2).$$

Сандық тексеру. $u = 1$, $v = 1$, $N = 100$, $n = 2$ алсақ: $k_1 = 100/2 = 50$, $k_2 = 200/3 \approx 66,7$.

Формулалар: $v = 1 \cdot 2 \cdot (66,7 - 50) / (100 - 66,7) = 33,3/33,3 = 1 \checkmark$; $N = 50 \cdot 66,7 \cdot 1 / 33,3 = 100 \checkmark$

Ескерту. Кейбір жинақтарда жылдамдық $v = u(k_2 - k_1n)/(nk_1 - k_2)$ түрінде берілген — алымда n көбейткіші жақшаның ішінде тұр. Жоғарыдағы сандық тексеруде ол $-u$ береді, яғни бұл — теру қатесі. Дұрысы: $v = un(k_2 - k_1)/(nk_1 - k_2)$.

Жауабы. $N = k_1k_2(n - 1)/(nk_1 - k_2)$; $v = un(k_2 - k_1)/(nk_1 - k_2)$.

26

Төмен түсетін эскалатормен жоғары жүгіру

Эскалатор · Орташа · Гончаренко № 26

Жауабы. $t_3 = 2t_1t_2/(t_2 - t_1) \approx 2,7$ мин

Берілгені. $t_1 = 1$ мин — эскалатормен бірге төмен жүгіру уақыты; $t_2 = 4$ мин — сол эскалатормен жоғары жүгіру уақыты.

Табу керек. t_3 — қозғалмай тұрған адамның түсу уақыты.

Идея. Үш жағдайда да эскалатордың ұзындығы l бірдей. Екі теңдеуден адамның өз жылдамдығын шығарып тастап, эскалатордың жылдамдығын табамыз.

Шешуі.

1. Эскалатордың жылдамдығы v (төмен), адамның эскалаторға қатысты жылдамдығы u .

Төмен жүгіру — жылдамдықтар қосылады:

$$l = (v + u) \cdot t_1. \quad (1)$$

Жоғары жүгіру — адам эскалаторға қарсы жүреді, жердегі жылдамдығы $u - v$ (жоғары шыға алуы үшін $u > v$):

$$l = (u - v) \cdot t_2. \quad (2)$$

2. Екеуінен:

$$v + u = l/t_1, \quad u - v = l/t_2.$$

Біріншісінен екіншісін азайтамыз — u қысқарады:

$$2v = 1/t_1 - 1/t_2 = l(t_2 - t_1)/(t_1 t_2) \Rightarrow v = l(t_2 - t_1) / (2t_1 t_2).$$

3. Қозғалмай тұрған адам үшін:

$$t_3 = l / v = 2t_1 t_2 / (t_2 - t_1) = 2 \cdot 1 \cdot 4 / (4 - 1) = 8/3 \approx 2,7 \text{ мин.}$$

Тексеру. $l = 8$ бірлік алсақ: $v = 8 \cdot 3 / (2 \cdot 1 \cdot 4) = 3$ бірлік/мин, $u = 1/t_1 - v = 8 - 3 = 5$ бірлік/мин.

Жоғары: $(5 - 3) \cdot 4 = 8 \checkmark$ Қозғалмай: $8/3 \approx 2,7$ мин $\checkmark$

Ескерту. Формуланың бөлімі — $t_2 - t_1$, керісінше емес: жоғары жүгіру әрқашан ұзағырақ ($t_2 > t_1$), сондықтан айырма оң болуы керек.

Жауабы. $t_3 = 2t_1 t_2 / (t_2 - t_1) = 8/3 \approx 2,7$ мин (2 мин 40 с).

27

Неліктен қозғалтқыш сөндірулі қайықтың рулі жұмыс істемейді?

Ағыстағы қозғалыс · Оңай · Гончаренко № 27

Жауабы. Қайық суға қатысты қозғалмайды, сондықтан руль ағынмен әрекеттеспейді

Берілгені. Қайық өзен ағысымен төмен қарай жүзіп келеді; қозғалтқыш қосулы немесе сөндірулі.

Табу керек. Рульдің жұмысын физикалық тұрғыдан түсіндіру.

Идея. Руль — жерге қатысты жылдамдыққа емес, **суға қатысты жылдамдыққа** ғана жауап береді. Күш пайда болу үшін суға қатысты қозғалыс қажет.

Шешуі.

1. Қозғалтқыш сөндірулі. Қайық тек ағыспен бірге ағады, яғни судың жылдамдығына тең жылдамдықпен қозғалады. Суға байланысқан санақ жүйесінде қайық та, руль де **қозғалмай тұр**. Су рульдің бетіне қатысты ақпағандықтан, ол рульге қысым күшін түсірмейді. Рульді қанша бұрсаң да, айналдырушы күш те, момент те пайда болмайды — қайықты басқару мүмкін емес.

Жерге қатысты қайықтың жылдамдығы нөлден өзгеше екені мұнда маңызды емес: гидродинамикалық күш **салыстырмалы** жылдамдыққа тәуелді (шамамен $\rho S v_{\text{сал}}^2$ -қа пропорционал).

2. Қозғалтқыш қосулы. Бұранда суды артқа лақтырады. Біріншіден, қайық суға қатысты алға жылжиды; екіншіден, рульге бұранда тудырған қуатты су ағыны келіп соғылады. Енді $v_{\text{сал}} \neq 0$, сондықтан бұрылған руль ағынды бүйірге бұрып, өзіне қарсы күш алады. Оның қайықтың ауырлық центріне қатысты моменті қайықты бұрады.

Практикалық қорытынды. Тәжірибелі қайықшылар ағыспен ағып бара жатқанда да қайықты басқару үшін қозғалтқышты қысқа мерзімге қосады немесе ескекпен қалақ салады — яғни суға қатысты қозғалыс тудырады. Дәл сол себептен желкенді қайық та тоқтап қалғанда басқарылмайды.

Жауабы. Қозғалтқыш сөндірулі кезде қайық суға қатысты қозғалмайды, сондықтан су рульге күш түсірмейді және руль қайықты бұра алмайды.

28 Қарсы келе жатқан пойыз екі электр пойызын кездестіреді

Салыстырмалы қозғалыс · Орташа · Гончаренко № 28

Жауабы. $v_1 = v(t_1 - t_2)/t_2 = 45 \text{ км/сағ}$

Берілгені. $t_1 = 10 \text{ мин} = 1/6 \text{ сағ}$ — электр пойыздардың шығу аралығы; $v = 30 \text{ км/сағ}$ — олардың жылдамдығы; $t_2 = 4 \text{ мин} = 1/15 \text{ сағ}$ — қарсы пойыздың оларды кездестіру аралығы.

Табу керек. v_1 — қарсы пойыздың жылдамдығы.

Идея. Екі электр пойызының арасындағы қашықтық жолда **тұрақты**: екіншісі шыққанда біріншісі $v \cdot t_1$ қашықтықты жүріп үлгерген. Қарсы пойыз осы алшақтықты $(v + v_1)$ жылдамдықпен жабады.

Шешуі.

1. Электр пойыздар арасындағы қашықтық:

$$L = v \cdot t_1 = 30 \cdot (1/6) = 5 \text{ км.}$$

2. Қарсы пойыз бірінші электр пойызды кездестіргеннен кейін екіншісіне дейін нақ осы L қашықтықты жабуы керек, ал жақындау жылдамдығы $v + v_1$:

$$L = (v + v_1) \cdot t_2 \Rightarrow v \cdot t_1 = (v + v_1) \cdot t_2.$$

3. Осыдан:

$$v_1 = v \cdot (t_1 - t_2) / t_2 = 30 \cdot (10 - 4) / 4 = 30 \cdot 1,5 = 45 \text{ км/сағ.}$$

Тексеру. $v + v_1 = 75 \text{ км/сағ}$; $5 \text{ км} \div 75 \text{ км/сағ} = 1/15 \text{ сағ} = 4 \text{ мин} \checkmark$

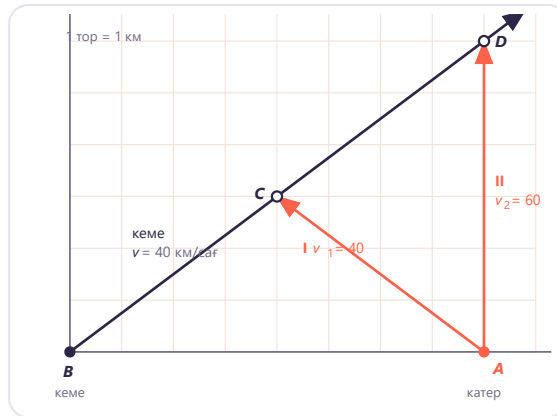
Талдау. Формуладан $t_2 < t_1$ болса ғана $v_1 > 0$ екені көрінеді: қарсы пойыз электр пойыздарды әрқашан жиірек кездестіреді. Ал $t_2 = t_1$ болса $v_1 = 0$ — «қарсы пойыз» орнында тұрған болады.

Жауабы. $v_1 = v(t_1 - t_2)/t_2 = 45 \text{ км/сағ.}$

29 Торпедалық катер: торпедалар кемеге тие ме?

Графиктік әдіс · Күрделі · Гончаренко № 29

Жауабы. I торпеда тиеді (7,5 мин-тан кейін); II торпеда тимейді — D нүктесіне кемеден 9 мин бұрын жетеді



1-сурет. Катер А нүктесінде, кеме жіберу сәтінде В нүктесінде. Бір тор — 1 км.

Берілгені. $v = 40$ км/сағ, $v_1 = 40$ км/сағ, $v_2 = 60$ км/сағ. Тор бойынша координаталары: $B(0; 0)$, $A(8; 0)$, $C(4; 3)$, $D(8; 6)$, өлшем бірлігі — км.

Табу керек. Әр торпеданың кемеге тиетін-тимейтінін.

Идея. Торпеда кемеге тиеді, егер ол нысана нүктесіне кемемен **дәл бір мезгілде** жетсе. Демек екі уақытты салыстыру жеткілікті: торпеданың А-дан нысанаға жету уақыты және кемеңіз В-дан сол нүктеге жету уақыты. Қашықтықтарды сызғышпен өлшейміз (немесе тор бойынша Пифагор теоремасымен санаймыз).

1. Қашықтықтар:

$$AC = \sqrt{((8-4)^2 + 3^2)} = \sqrt{25} = 5 \text{ км}, \quad BC = \sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5 \text{ км},$$

$$AD = 6 \text{ км}, \quad BD = \sqrt{(8^2 + 6^2)} = 10 \text{ км}.$$

2. I торпеда (нысана — С нүктесі):

$$t_{\text{торп}} = AC/v_1 = 5/40 = 0,125 \text{ сағ} = 7,5 \text{ мин},$$

$$t_{\text{кеме}} = BC/v = 5/40 = 0,125 \text{ сағ} = 7,5 \text{ мин}.$$

Уақыттар тең — торпеда мен кеме С нүктесінде кездеседі. **Торпеда тиеді.**

3. II торпеда (нысана — D нүктесі):

$$t_{\text{торп}} = AD/v_2 = 6/60 = 0,1 \text{ сағ} = 6 \text{ мин},$$

$$t_{\text{кеме}} = BD/v = 10/40 = 0,25 \text{ сағ} = 15 \text{ мин}.$$

Торпеда D нүктесіне кемеден 9 минут бұрын жетеді, яғни кемеңіз алдынан өтіп кетеді. **Торпеда тимейді.**

Жалпы шарт. Нысана Р нүктесі үшін тию шарты бір ғана теңдікпен жазылады:

$$AP / v_{\text{торпеда}} = BP / v_{\text{кеме}}.$$

Ескерту. Түпнұсқа жинақта жылдамдықтар тек сызбадағы векторлармен берілген — оларды сызғышпен өлшеп алу керек. Мұнда есеп өзіне-өзі жеткілікті болуы үшін жылдамдықтар сан түрінде жазылды; шешу әдісі мен жауабы өзгерген жоқ.

Жауабы. I торпеда кемеge тиеді (жіберілгеннен 7,5 мин өткенде, C нүктесінде); II торпеда тимейді.

Гидростатика 4

30

Төрт түрлі ағаш кубиктен құралған куб

Тығыздық · Оңай · Гончаренко № 30

Жауабы. $\rho = 0,1(3\rho_1 + 4\rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4) = 570 \text{ кг/м}^3$

Берілгені. $\rho_1 = 200 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 700 \text{ кг/м}^3$, $\rho_3 = 550 \text{ кг/м}^3$, $\rho_4 = 1200 \text{ кг/м}^3$; $N_1 : N_2 : N_3 : N_4 = 3 : 4 : 2 : 1$.

Табу керек. ρ — кубтың орташа тығыздығы.

Идея. Орташа тығыздық — әрқашан **толық массаның толық көлемге** қатынасы. Барлық кубиктердің көлемі бірдей болғандықтан, нәтиже тығыздықтардың **сандарымен салмақталған ортасы** болып шығады.

1. Кубиктердің сандарын $3n$, $4n$, $2n$, n деп жазамыз, әрқайсысының көлемі V . Толық көлем:

$$V_{\text{толық}} = (3n + 4n + 2n + n) \cdot V = 10nV.$$

2. Толық масса:

$$m = V(3n\rho_1 + 4n\rho_2 + 2n\rho_3 + n\rho_4) = nV(3\rho_1 + 4\rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4).$$

3. Орташа тығыздық (nV қысқарады):

$$\rho = m / V_{\text{толық}} = (3\rho_1 + 4\rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4) / 10 = 0,1(3\rho_1 + 4\rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4).$$

4. Сандарды қоямыз:

$$\rho = 0,1(600 + 2800 + 1100 + 1200) = 0,1 \cdot 5700 = 570 \text{ кг/м}^3.$$

Талдау. Тығыздықтардың жай арифметикалық ортасы $(200 + 700 + 550 + 1200)/4 = 662,5 \text{ кг/м}^3$ болар еді — бұл дұрыс емес: жеңіл ағаштардың **үлесі** көбірек, сондықтан нәтиже төмен шығады. Кубтың неше кубиктен тұратынын білудің қажеті жоқ — тек қатынас маңызды.

Жауабы. $\rho = 570 \text{ кг/м}^3$.

Жауабы. Қысым азайғанда жанасу ауданы артады, құмға түсетін қысым кемиді, сондықтан іздің тереңдігі азаяды

Берілгені. Автомобиль құм үстінде жүреді; шиналарындағы ауа қысымын азайтады.

Табу керек. Мұның физикалық себебін түсіндіру.

Идея. Есепте екі түрлі «қысым» кездеседі, оларды шатастырмау керек: шинаның **ішіндегі** ауа қысымы және шинаның **құмға** түсіретін қысымы. Олар тең емес, бірақ тығыз байланысты.

1. Шинаның қабығы жұмсақ, сондықтан жермен жанасқан бетте ол ішкі ауа қысымына жуық қысым береді. Доңғалаққа түсетін салмақ P өзгермейді, демек

$$p \approx P/S \Rightarrow S \approx P/p,$$

мұндағы S — жанасу ауданы. Яғни аудан ішкі қысымға **кері пропорционал**.

2. Ішкі қысым p азайғанда шина көбірек жаншылады және жермен жанасу ауданы S артады.

3. Автомобильдің салмағы сол күйінде қалып, аудан артқандықтан, құмға түсетін қысым азаяды.

4. Құм — сусымалы орта: оның шөгу тереңдігі түсірілген қысымға тәуелді. Қысым азайса, доңғалақ аз батады, іздің тереңдігі кемиді, сондықтан автомобиль құмға «отырып» қалмайды және қозғалысқа кететін кедергі де азаяды.

Талдау. Дәл осы себептен шөл далада, батпақта және қарда жүретін техникаға кең әрі жұмсақ шиналар орнатады, ал шынжыр табанды машиналар салмағын бүкіл шынжыр ауданына таратады. Керісінше, қатты асфальтта қысымды жоғары ұстаған тиімді: жанасу ауданы кішірейіп, домалау кедергісі азаяды.

Жауабы. Ішкі қысым азайғанда шинаның жермен жанасу ауданы артады, сондықтан құмға түсетін қысым кемиді де, іздің тереңдігі азаяды.

Жауабы. Пенопласт 2 см тереңдікке батады; кубтың үсті мен түптің арақашықтығы 0,4 см-ге кемиді (су деңгейі өзгермейді)

Берілгені. $d = 8$ см; $\rho_m = 0,9\rho_c$; $\rho_l = 0,5\rho_c$; әр жартының биіктігі $d/2 = 4$ см.

Табу керек. Пенопласттың бату тереңдігі және кубтың үсті мен түптің арақашықтығының өзгерісі.

Идея. Жүзу шарты — Архимед күші ауырлық күшіне тең, яғни **ығыстырылған судың массасы дененің массасына тең**. Есепті үш қадамға бөлеміз: еруге дейінгі күй, ерігеннен кейінгі күй және су деңгейінің өзгеруі.

1. Еруге дейін. Кубтың массасы:

$$m = (d^3/2)\rho_m + (d^3/2)\rho_n = (d^3/2)(0,9 + 0,5)\rho_c = 0,7\rho_c d^3.$$

Ығыстырылған су көлемі $V = m/\rho_c = 0,7d^3$. Кубтың көлденең қимасы d^2 , демек батқан тереңдік:

$$h_1 = 0,7d^3/d^2 = 0,7d = 5,6 \text{ см, судан шығып тұрған бөлігі: } d - h_1 = 0,3d = 2,4 \text{ см.}$$

5,6 см > 4 см болғандықтан мұз жартысы толығымен су астында, оның үстіне пенопластың 1,6 см бөлігі де батып тұр.

2. Ерігеннен кейін. Мұз суға айналып, калориметрдегі суға қосылады; жүзіп қалатыны — тек пенопласт жартысы, массасы $(d^3/2) \cdot 0,5\rho_c = 0,25\rho_c d^3$. Оның бату тереңдігі:

$$h_2 = 0,25d^3/d^2 = 0,25d = 2 \text{ см, судан шығып тұрғаны: } d/2 - h_2 = 4 - 2 = 2 \text{ см.}$$

3. Су деңгейі өзгере ме? Еруге дейін дене $0,7d^3$ көлем су ығыстырған. Ерігеннен кейін мұздың суы $0,45d^3$ көлем алады (массасы $0,45\rho_c d^3$), ал пенопласт $0,25d^3$ ығыстырады; қосындысы $0,45 + 0,25 = 0,7d^3$ — дәл сол шама. Демек **су деңгейі өзгермейді**.

4. Арақашықтықтың өзгерісі. Кубтың үсті мен түптің арасы — түптен су бетіне дейінгі тұрақты тереңдік плюс судан шығып тұрған бөлік. Су деңгейі өзгермегендіктен, айырма тек екінші мүшеден шығады:

$$\Delta h = 2,4 - 2 = 0,4 \text{ см.}$$

Талдау. Жүзіп жүрген мұз ерігенде су деңгейінің өзгермейтіні — белгілі нәтиже. Мұнда мұз құрама дененің бөлігі болса да, ол толығымен су астында тұрғандықтан, дәл сол қорытынды сақталады. Ал жалпы түрдегі өрнек:

$$\Delta h = (d/2) \cdot (3/2 - (\rho_m + \rho_n)/\rho_c) = 4 \cdot (1,5 - 1,4) = 0,4 \text{ см} \checkmark$$

Жауабы. Пенопласт 2 см тереңдікке батады; кубтың үсті мен түптің арақашықтығы 0,4 см-ге кемиді.

40

Іінгі таразы: ауада да, вакуумда да тепе-теңгік

Архимед күші · Күрделі · Гончаренко № 40

Жауабы. $\varepsilon = \rho_0(\rho_1 - \rho_2)/(2\rho_1\rho_2) \approx 1,8 \cdot 10^{-4}$, яғни $\approx 0,018 \%$

Берілгені. $\rho_0 = \rho_{\text{су}}/800 = 1000/800 = 1,25 \text{ кг/м}^3$ — ауаның тығыздығы; $\rho_1 = 11\,300 \text{ кг/м}^3$ (қорғасын); $\rho_2 = 2700 \text{ кг/м}^3$ (алюминий).

Табу керек. ε — иіндер ұзындығының салыстырмалы айырмасы.

Идея. Есептің шарты таразы иіндерінің тең емес екенін бірден айтып тұр: дұрыс таразыда екі жағдайда да тепе-теңдік бірдей болар еді. Ауада денелерге Архимед күші әсер етеді, вакуумда — жоқ; ал Архимед күші денелердің **көлемдеріне** тәуелді, көлемдері әртүрлі. Осы екі бақылау екі теңдеу береді.

1. Белгілеулер: кесектің массасы m_1 , көлемі $V_1 = m_1/\rho_1$; гірлердің массасы m_2 , көлемі $V_2 = m_2/\rho_2$. Иіндері l_1 және l_2 .

2. Ауадағы тепе-теңдік (кесек l_1 иінінде, гірлер l_2 -де), Архимед күшін ескереміз:

$$(m_1g - \rho_0gV_1) \cdot l_1 = (m_2g - \rho_0gV_2) \cdot l_2.$$

$V = m/\rho$ екенін қойып, g -ны қысқартамыз:

$$m_1(1 - \rho_0/\rho_1) \cdot l_1 = m_2(1 - \rho_0/\rho_2) \cdot l_2. \quad (1)$$

3. Вакуумдағы тепе-теңдік — орындары ауысқан күйде (кесек l_2 иінінде, гірлер l_1 -де), Архимед күші жоқ:

$$m_1 \cdot l_2 = m_2 \cdot l_1. \quad (2)$$

4. (2)-ден $m_2/m_1 = l_2/l_1$. Оны (1)-ге қойсақ:

$$(1 - \rho_0/\rho_1) \cdot l_1 = (l_2/l_1)(1 - \rho_0/\rho_2) \cdot l_2,$$

$$(l_2/l_1)^2 = (1 - \rho_0/\rho_1) / (1 - \rho_0/\rho_2).$$

5. ρ_0 екі тығыздықтан да мыңдаған есе кіші, сондықтан жуықтап ашамыз: $(1 - a)/(1 - b) \approx 1 - a + b$, ал $\sqrt{1 + x} \approx 1 + x/2$. Сонда

$$l_2/l_1 \approx 1 + (\rho_0/2) \cdot (1/\rho_2 - 1/\rho_1) = 1 + \rho_0(\rho_1 - \rho_2)/(2\rho_1\rho_2).$$

6. Иіндердің салыстырмалы айырмасы:

$$\varepsilon = (l_2 - l_1)/l_1 \approx \rho_0(\rho_1 - \rho_2)/(2\rho_1\rho_2) = 1,25 \cdot (11\,300 - 2700) / (2 \cdot 11\,300 \cdot 2700),$$

$$\varepsilon \approx 1,8 \cdot 10^{-4} = 0,018 \, \%.$$

Талдау. Айырма он мыңнан екі бөлікке де жетпейді — бірақ дәл өлшеулерде осындай ұсақ ауытқулар елеулі. Иіндердің теңсіздігінен мүлде құтылу үшін **Гаусс әдісін** қолданады: денені алдымен бір табаққа, сосын екіншісіне қойып өлшеп, нәтижелердің геометриялық ортасын алады — сонда l_1 мен l_2 өрнектен толық қысқарады.

Ауаның Архимед күшін ескеру де кездейсоқ емес: қорғасын мен алюминийдің тығыздықтары төрт есеге жуық өзгеше, сондықтан бірдей массада олардың көлемдері де төрт есе өзгеше, ал Архимед күштері солай ерекшеленеді.

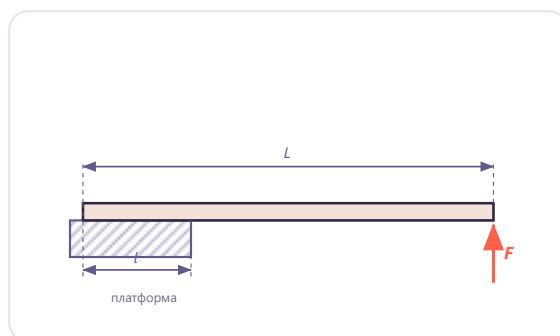
Жауабы. $\varepsilon \approx 1,8 \cdot 10^{-4}$, яғни иіндердің ұзындықтары шамамен **0,018 %-ға** өзгеше.

Статика 7

31 Платформадан салбыраған арқалық: күштің шекаралары

Күш моменті · Күрделі · Гончаренко № 31

Жауабы. $F_{\max}/F_{\min} = (L - l)/(L - 2l) = 1,25$



2-сурет. Арқалықтың l бөлігі платформада, ұшына F күші түсірілген.

Берілгені. $L = 6$ м, $l = 1$ м; арқалық біртекті, массасы m ; F — салбыраған ұшқа жоғары бағытталған.

Табу керек. $F_{\max}/F_{\min}$.

Идея. Арқалық өз бетінше тұра алмайды: платформада небәрі 1 м жатыр, ал ауырлық центрі (арқалықтың ортасы, ұшынан 3 м) платформадан тыс. Сондықтан F күші міндетті түрде қажет. Екі шектік жағдай бар:

- F тым **аз** болса — арқалық платформаның шетінен асып төңкеріледі;
- F тым **үлкен** болса — арқалықтың сол (платформадағы) ұшы көтеріліп, ол платформадан ұшып кетеді.

Дәл осы екі шекте платформаның тіреу реакциясы бір ғана нүктеге жиналады — сондықтан моменттер ережесін жазу жеткілікті.

1. $F_{\min}$. Мұнда реакция платформаның шетіне (l нүктесіне) жиналады. Сол нүктеге қатысты моменттерді теңестіреміз — F күші $(L - l)$ иінінде, ал салмақ $(L/2 - l)$ иінінде:

$$F_{\min} \cdot (L - l) = mg \cdot (L/2 - l).$$

2. $F_{\max}$. Мұнда реакция арқалықтың сол ұшына жиналады. Сол ұшқа қатысты моменттер (F күшінің иіні L , салмақтікі $L/2$):

$$F_{\max} \cdot L = mg \cdot (L/2).$$

3. Екеуін бөлеміз — m мен g қысқарады:

$$F_{\max}/F_{\min} = [(L/2) / L] \cdot [(L - l) / (L/2 - l)] = (L - l)/(L - 2l).$$

4. Сандарды қоямыз:

$$F_{\max}/F_{\min} = (6 - 1)/(6 - 2) = 5/4 = 1,25.$$

Тексеру. $F_{\min} = mg(3 - 1)/5 = 0,4mg$; $F_{\max} = mg/2 = 0,5mg$; қатынасы $0,5/0,4 = 1,25$ ✓

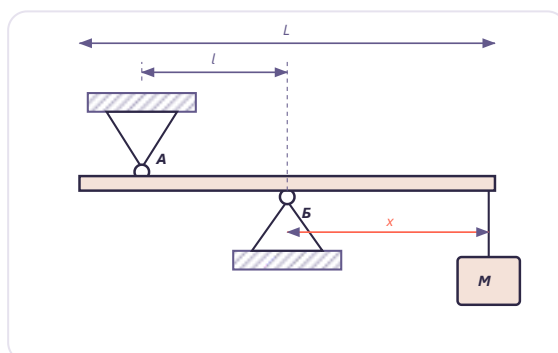
Талдау. Рұқсат етілген аралық өте тар: күш салмақтың небәрі 40 %-нан 50 %-на дейін өзгере алады. $l = L/2$ болса, бөлім нөлге айналады — арқалықтың дәл жартысы платформада жатса, ол F -сіз де тұра алады және жоғарғы шек шексіздікке ұмтылмайды: мұндайда есептің қойылымы өзгереді.

Жауабы. $F_{\max}/F_{\min} = (L - l)/(L - 2l) = 1,25$.

32 Екі роликпен «бекітілген» арқалыққа ілінетін ең ауыр жүк

Күш моменті · Күрделі · Гончаренко № 32

Жауабы. $M_{\max} = F_0/g - m$; Б ролигі жүк ілінген ұштан $x = mL/(2(m + M))$ қашықтықта болуы керек



3-сурет. А ролигі арқалықты жоғарыдан басады, Б ролигі астынан тірейді.

Берілгені. Арқалықтың массасы m , ұзындығы L ; роликтердің арақашықтығы l ; Б ролигіне рұқсат етілген ең үлкен күш F_0 .

Табу керек. $M_{\max}$ және арқалықтың орналасуы.

Идея. Б ролигіне түсетін күшті азайту керек. Оны вертикаль бойынша тепе-теңдіктен көреміз: Б ролигі жүйені жоғары қарай тіреп тұр, ал төмен тартатындар — арқалық пен жүктің салмағы және А ролигінің қысымы.

1. Вертикаль бойынша тепе-теңдік:

$$R_B = (m + M)g + R_A.$$

2. R_B ең кіші болуы үшін R_A мүмкіндігінше аз, шектік жағдайда $R_A = 0$ болуы керек. Сонда

$$R_B = (m + M)g \leq F_0 \Rightarrow M_{\max} = F_0/g - m.$$

3. Бірақ $R_A = 0$ болса, арқалық тек Б ролигінде тұрады — демек ол Б нүктесіне қатысты **өздігінен тепе-теңдікте** болуы керек. Жүк ілінген ұштан Б-ға дейінгі қашықтықты x деп алсақ, арқалықтың ауырлық центрі Б-дан екінші жақта, $(L/2 - x)$ қашықтықта жатады:

$$Mg \cdot x = mg \cdot (L/2 - x).$$

4. Осыдан:

$$x(M + m) = mL/2 \Rightarrow x = mL / (2(m + M)).$$

Талдау. Жауап роликтердің арақашықтығы І-ге **тәуелді емес**: А ролигі күш түсірмейтіндіктен, оның қай жерде тұрғаны маңызды емес. Мұндағы А ролигі — тек «сақтандырғыш»: жүк сәл ауырылап кетсе, арқалық аударылмай, А-ға тіреледі.

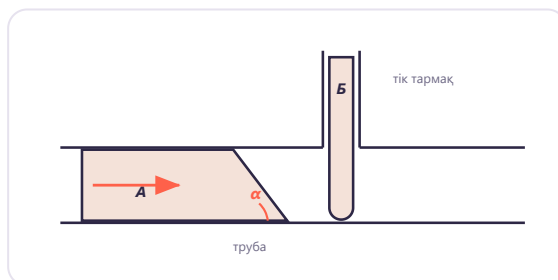
Шектік жағдайларды тексерейік. Жүк өте жеңіл болса ($M \rightarrow 0$), $x \rightarrow L/2$ — арқалық ортасымен Б ролигінде тұрады, бұл дұрыс. Жүк өте ауыр болса ($M \gg m$), $x \rightarrow 0$ — тіреуді жүкке барынша жақын қою керек.

Жауабы. $M_{\max} = F_0/g - m$; Б ролигі жүк ілінген ұштан $x = mL/(2(m + M))$ қашықтықта орналасуы керек.

33 Итергішті құбыр бойымен өткізу: үйкеліс шарты

Үйкеліс · Күрделі · Гончаренко № 33

Жауабы. $\mu < \operatorname{ctg} \alpha$



4-сурет. Итергіш А, бөгеуіш өзек Б; көлбеу беттің бұрышы α .

Берілгені. Итергіштің алдыңғы бетінің құбыр осімен жасайтын бұрышы α ; тік тармақ тегіс; өзектің төменгі ұшы дөңгелектелген.

Табу керек. Итергіш өтетіндей μ мәндері.

Идея. Итергіш өту үшін оның көлбеу беті өзекті **жоғары көтеруі** керек. Өзекке көлбеу беттен екі күш әсер етеді: бетке перпендикуляр N реакциясы және бет бойымен бағытталған үйкеліс күші μN . Біріншісі өзекті көтереді, екіншісі көтерілуге кедергі жасайды — соларды салыстырамыз.

1. Көтеретін күш. Бет осьпен α бұрыш жасағандықтан, оған перпендикуляр N күші тіктен α бұрышқа ауытқыған. Оның тік (көтеретін) құраушысы:

$$N_{\text{тік}} = N \cdot \cos \alpha.$$

2. Кедергі күші. Өзек бет бойымен жоғары сырғығанда, үйкеліс күші бет бойымен төмен бағытталады. Оның модулі μN , ал тік құраушысы:

$$F_{\text{тік}} = \mu N \cdot \sin \alpha.$$

3. Өзек көтерілуі үшін көтеретін құраушы кедергіден үлкен болуы керек:

$$N \cos \alpha > \mu N \sin \alpha \Rightarrow \cos \alpha > \mu \sin \alpha \Rightarrow \mu < \operatorname{ctg} \alpha.$$

Талдау. Мұнда ең қызығы — N күші жауапқа **кірмейді**. Себебі итергішті қаттырақ итеру арқылы N -ді қалағанша үлкен етуге болады, ал көтеретін де, кедергі жасайтын да күштер N -ге бірдей пропорционал. Сол себептен өзектің салмағы да елеусіз: жеткілікті үлкен N кез келген салмақты жеңеді.

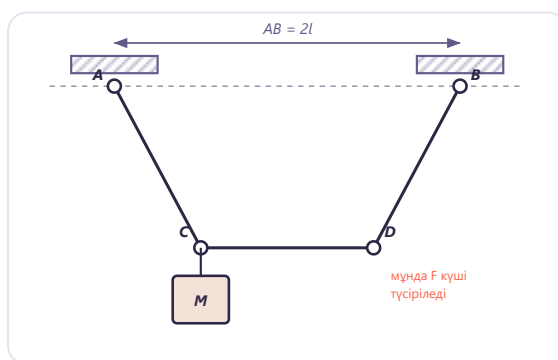
Демек шешім тек екі шамаға тәуелді: **бұрыш пен үйкеліс**. Бет қаншалықты жатық болса (α кіші), $\operatorname{ctg} \alpha$ соғұрлым үлкен және өткізу соғұрлым оңай; $\alpha \rightarrow 90^\circ$ (тік бет) болғанда $\operatorname{ctg} \alpha \rightarrow 0$ — мұндай итергіш өзекті мүлде көтере алмайды, себебі бетте көтеретін құраушы жоқ.

Жауабы. $\mu < \operatorname{ctg} \alpha$.

34 Үш топсалы өзек: CD-ны көлденең ұстайтын ең кіші күш

Күш моменті · Күрделі · Гончаренко № 34

Жауабы. $F_{\min} = Mg/2$, BD өзегіне перпендикуляр бағытта



5-сурет. AC, CD, DB өзектері топсалармен жалғанған; C топсасында M жүгі.

Берілгені. Үш өзектің әрқайсысының ұзындығы l ; $AB = 2l$; C топсасында массасы M жүк; өзектер салмақсыз.

Табу керек. $F_{\min}$ және оның бағыты.

Идея. Ұштарында тек топса бар **салмақсыз өзек** күшті тек өз бойымен бере алады (созылу немесе сығылу). Демек әр топсадағы өзек күштерінің бағыты белгілі, тек модульдері белгісіз. Белгісіз күштен құтылудың ыңғайлы тәсілі — теңдеуді **сол күшке перпендикуляр** өске проекциялау: сонда ол өрнекке мүлде кірмейді.

1. Геометрия. CD көлденең, $AC = CD = DB = l$ және $AB = 2l$ болғандықтан C пен D нүктелері A мен B-дан $l/2$ -ге ішке ығысқан. Сонда AC өзегі көлденеңмен

$$\cos \theta = (1/2)/1 = 1/2 \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

бұрыш жасайды. Симметрия бойынша DB өзегі де көлденеңмен 60° жасайды.

2. С топсасы. Оған үш күш әсер етеді: жүктің тартуы Mg (тік төмен), AC өзегінің күші (AC бойымен) және CD өзегінің күші F_{CD} (көлденең). Теңдеуді **AC-ға перпендикуляр** өске проекциялаймыз — AC өзегінің белгісіз күші жоғалады:

$$F_{CD} \cdot \sin 60^\circ = Mg \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow F_{CD} = Mg \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = Mg/\sqrt{3}.$$

3. D топсасы. Оған CD өзегінің күші (көлденең, модулі $Mg/\sqrt{3}$), DB өзегінің күші (DB бойымен) және ізделінді F күші әсер етеді. Енді теңдеуді **DB-ға перпендикуляр** өске проекциялаймыз — DB өзегінің белгісіз күші жоғалады:

$$F_{\perp} = F_{CD} \cdot \sin 60^\circ = (Mg/\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}/2) = Mg/2.$$

4. Бұл — F күшінің DB-ға перпендикуляр құраушысы; тепе-теңдік үшін ол дәл осындай болуға **міндетті**. Ал кез келген вектордың модулі өзінің кез келген құраушысынан кіші бола алмайды:

$$F \geq F_{\perp} = Mg/2, \text{ демек } F_{\min} = Mg/2.$$

Теңдік тек F толығымен осы перпендикуляр бағытта жатқанда орындалады, яғни ең тиімді бағыт — **BD өзегіне перпендикуляр**.

Талдау. Есептің әдістемелік мәні осында: «ең кіші күш» деген сұрақ кездессе, әдетте күштің міндетті құраушысын тауып, қалғанын нөлге теңестіру керек. Бұл — вектордың модулі құраушысынан кем болмайтынының тікелей салдары.

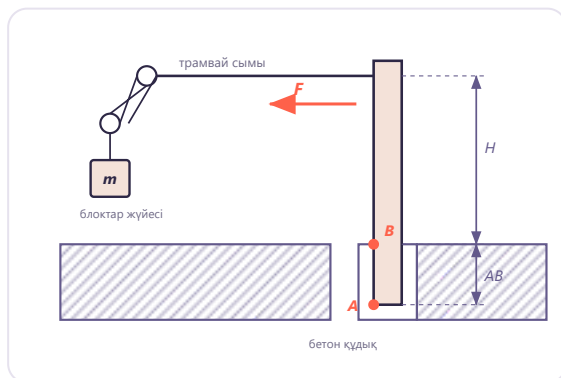
Жауабы. $F_{\min} = Mg/2$, BD өзегіне перпендикуляр бағытта.

35

Құдықтағы бағана: трамвай сымының керілуі

Күш моменті · Орташа · Гончаренко № 35

Жауабы. $F = 4mg \approx 3,9 \text{ кН}$; $F_A = F \cdot H/AB \approx 26 \text{ кН}$; $F_B = F(1 + H/AB) \approx 30 \text{ кН}$



6-сурет. Бағана бетон құдықта А және В нүктелерінде ғана тіреледі.

Берілгені. $m = 100 \text{ кг}$; $H = 10 \text{ м}$; $AB = 1,5 \text{ м}$; блоклар жүйесінің ұтысы — 4 есе; $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$.

Табу керек. F_A , F_B .

Идея. Бағана — үш **көлденең** күштің әсеріндегі қатты дене: жоғарыда сымның тартуы F , ал құдық қабырғасының B және A нүктелеріндегі реакциялары. Бағана қозғалмайды, демек күштердің қосындысы да, кез келген нүктеге қатысты моменттердің қосындысы да нөлге тең. Белгісіз күштен құтылу үшін момент осін сол күштің түсу нүктесінен өткіземіз.

1. Сымның керілу күші. Блоктар жүйесі төрт еселік ұтыс беретіндіктен:

$$F = 4mg = 4 \cdot 100 \cdot 9,8 = 3920 \text{ Н} \approx 3,9 \text{ кН}.$$

2. **A нүктесіне қатысты моменттер** (F_A -ның иіні нөл, сондықтан ол теңдеуге кірмейді). F күшінің A -дан биіктігі $H + AB$, F_B күшінікі — AB :

$$F \cdot (H + AB) = F_B \cdot AB \Rightarrow F_B = F \cdot (1 + H/AB).$$

$$F_B = 3920 \cdot (1 + 10/1,5) \approx 3,0 \cdot 10^4 \text{ Н} = 30 \text{ кН}.$$

3. **B нүктесіне қатысты моменттер** (енді F_B кірмейді):

$$F \cdot H = F_A \cdot AB \Rightarrow F_A = F \cdot H/AB = 3920 \cdot 10/1,5 \approx 2,6 \cdot 10^4 \text{ Н} = 26 \text{ кН}.$$

Тексеру. Көлденең бағыттағы күштердің қосындысы нөлге тең болуы керек: $F_B = F_A + F$, яғни $26 + 3,9 \approx 30 \text{ кН} \checkmark$

Талдау. Құдық таяз ($AB = 1,5 \text{ м}$), ал иін ұзын ($H = 10 \text{ м}$) — сондықтан бағана құдық қабырғасына сымның тартуынан **жеті есеге жуық** артық күшпен басады. Иін қатынасы H/AB қаншалықты үлкен болса, тіректегі күш соғұрлым артады. Дәл осы себептен тірек құрылымдарын есептегенде тереңдік шешуші рөл атқарады: құдықты екі есе тереңдетсе, қабырғаға түсетін күш екі есеге жуық азаяды.

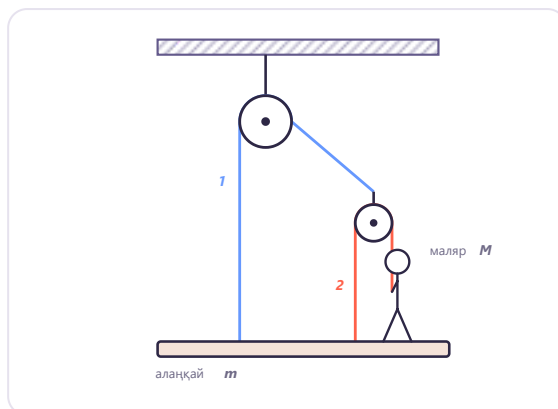
Жауабы. $F_A \approx 26 \text{ кН}$; $F_B \approx 30 \text{ кН}$.

36

Маляр өзі тұрған алаңқайды көтереді

Блоктар · Орташа · Гончаренко № 36

Жауабы. $F = (M + m)g/4 \approx 220,5 \text{ Н}$; алаңқайға $367,5 \text{ Н}$ күшпен басады; $m_{\text{max}} = 3M = 180 \text{ кг}$



7-сурет. Маляр алаңқайда тұрып, арқанның ұшынан тартады.

Берілгені. $M = 60$ кг, $m = 30$ кг, $g = 9,8$ м/с².

Табу керек. F ; малярдың алаңқайға түсіретін қысым күші N ; $m_{\max}$.

Идея. «Маляр + алаңқай» — бір **жүйе** деп қарастырамыз. Сонда малярдың алаңқайға түсіретін күші ішкі күш болып шығады да, теңдеуге мүлде кірмейді: тек арқан тармақтарының тартуы мен ауырлық күші қалады. Бұл — есептің ең қысқа жолы.

1. Арқан тармақтарын санаймыз. Бір арқанның бойындағы керілу барлық жерде бірдей — F . Жүйені жоғары тартатын төрт тармақ бар: төбедегі қозғалмайтын блок арқылы өтіп алаңқайға бекітілген тармақ, қозғалмалы блокты айналып өтетін екі тармақ және малярдың қолындағы тармақ.

2. «Маляр + алаңқай» жүйесінің тепе-теңдігі:

$$4F = (M + m)g \Rightarrow F = (M + m)g/4 = 90 \cdot 9,8 / 4 = 220,5 \text{ Н.}$$

3. Малярдың өзін бөлек қарастырамыз. Оған үш күш әсер етеді: ауырлық күші Mg (төмен), арқанның тартуы F (жоғары) және алаңқайдың тіреу күші N (жоғары):

$$N = Mg - F = 60 \cdot 9,8 - 220,5 = 588 - 220,5 = 367,5 \text{ Н.}$$

Ньютонның үшінші заңы бойынша маляр да алаңқайға дәл осындай, 367,5 Н күшпен басады — яғни өз салмағынан айтарлықтай аз.

4. Ең ауыр алаңқай. Маляр арқанды өз салмағынан артық күшпен тарта алмайды: әйтпесе ол алаңқайдан көтеріліп кетер еді. Формула түрінде бұл $N \geq 0$ шарты:

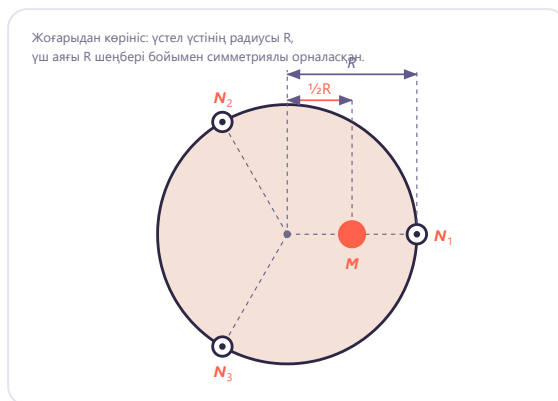
$$F \leq Mg \Rightarrow (M + m)g/4 \leq Mg \Rightarrow M + m \leq 4M,$$

$$m \leq 3M = 3 \cdot 60 = 180 \text{ кг.}$$

Талдау. Шектеу малярдың бұлшық ет күшінде емес, **салмағында**: қаттырақ тарту үшін оның алаңқайға тірелуі керек еді, ал N нөлге жеткенде тірелетін ештеңе қалмайды. Дәл сол себептен мұндай жүйеде жеңіл адам ауыр алаңқайды көтере алмайды, қанша күшті болса да.

Жауабы. $F = 220,5$ Н; маляр алаңқайға 367,5 Н күшпен басады; ең үлкен алаңқай массасы $m_{\max} = 3M = 180$ кг.

Жауабы. $N_1 = \frac{2}{3}Mg$ (жүкке жақын аяқ); $N_2 = N_3 = \frac{1}{6}Mg$



8-сурет. Жоғарыдан көрініс: жүк центрден 1-аяққа қарай $\frac{1}{2}R$ ығысқан.

Берілгені. Үстел үстінің радиусы R; үш аяғы 120° аралықпен орналасқан; жүк центрден $\frac{1}{2}R$ қашықтықта, 1-аяққа қарай ығысқан; үстелдің массасы ескерілмейді.

Табу керек. N_1, N_2, N_3 .

Идея. Белгісіз үшеу, ал тік бағыттағы тепе-теңдік бір ғана теңдеу береді. Бірақ **симметрия** көмектеседі: жүк дәл 1-аяққа қарай ығысқандықтан, 2- және 3-аяқтар толық тең құқылы, демек $N_2 = N_3$. Қалған екі белгісізге екі теңдеу жеткілікті — тік бағыт және дұрыс таңдалған оське қатысты моменттер.

1. Тік бағыттағы тепе-теңдік:

$$N_1 + 2N_2 = Mg.$$

2. **Момент осін таңдау** — есептің кілті. 2- және 3-аяқтарды қосатын түзуді ось етіп аламыз: сол оське қатысты N_2 мен N_3 -тің иіні нөл, сондықтан олар теңдеуге мүлде кірмейді.

Геометрия: 2- және 3-аяқтар центрден $\frac{1}{2}R$ қашықтықта жатқан түзудің бойында тұр (120° пен 240° -тің косинусы $-\frac{1}{2}$). Демек осы оське дейінгі қашықтықтар:

$$1\text{-аяқ: } R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R, \quad \text{жүк: } \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R = R.$$

3. Моменттер теңдеуі:

$$N_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)R = Mg \cdot R \Rightarrow N_1 = \left(\frac{2}{3}\right)Mg.$$

4. Бірінші теңдеуден:

$$2N_2 = Mg - \left(\frac{2}{3}\right)Mg = \left(\frac{1}{3}\right)Mg \Rightarrow N_2 = N_3 = \left(\frac{1}{6}\right)Mg.$$

Тексеру. $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1 \checkmark$ — үш реакцияның қосындысы жүктің салмағына тең.

Талдау. Жүк центрде тұрса, үш аяқ та $Mg/3$ -тен көтерер еді. $\frac{1}{2}R$ -ға ығысқанда жақын аяққа түсетін күш екі есе артып, алыс екеуіне түсетін күш екі есе азайды. Жалпы түрде, жүк центрден d қашықтықта болса, $N_1 = Mg(d + \frac{1}{2}R)/(\frac{3}{2}R)$. Бұдан $d = R$ болғанда, яғни жүк дәл 1-аяқтың үстіне қойылғанда, $N_1 = Mg$ және $N_2 = N_3 = 0$ — бүкіл салмақты бір аяқ көтереді.

Жауабы. $N_1 = (2/3)Mg$; $N_2 = N_3 = (1/6)Mg$.



fiziqaz academy — Физика мұғалімдеріне арналған онлайн мастер-кластар. Ғалымбек Ташев: Назарбаев Зияткерлік мектебі мен International School of Astana мұғалімі, CERN түлегі, олимпиада қазысы.

<https://fiziqaz.academy> · +7 707 606 0525